

COURS THEORIE DU SIGNAL



PREPAREE PAR :

Dr. TAHRAOUI SOUAAD



Avant-propos

Ce document est un support de cours qui s'adresse aux étudiants de 2^{ème} année de la formation Licence électronique et télécommunication. En plus, c'est un document de base en matière de théorie et traitement du signal pour les post-graduants, qui désirent approfondir leurs connaissances.

Ce cours permettra à l'étudiant d'acquérir les notions de base sur les outils mathématiques utilisés en traitement du signal.

Dans le cadre de ce cours , nous nous intéressons principalement à la théorie du signal qui est une discipline indispensable de nos jours. Il a pour objet l'élaboration ou l'interprétation des signaux porteurs d'information.



Semestre : 4

Unité d'enseignement : UEF 2.2.2

Matière 2: Théorie du signal

VHS : 30h00 (Cours: 1h30)

Crédits : 4

Coefficient : 2

CONNAISSANCES PREALABLES RECOMMANDEES

Cours de mathématiques de base.

CONTENU DE LA MATIERE :

Chapitre 1. Généralités sur les signaux (3 Semaines)

Objectifs du traitement du signal. Domaines d'utilisation. Classification des signaux (morphologique, spectrale, ...). Signaux déterministes (périodiques et non-périodiques) et signaux aléatoires (stationnaires et non stationnaires). Causalité. Notions de puissance et d'énergie. Fonctions de base en traitement du signal (mesure, filtrage, lissage, modulation, détection ...). Exemples de signaux de base (impulsion rectangulaire, triangulaire, rampe, échelon, signe, Dirac)

Chapitre 2. Analyse de Fourier (4 Semaines)

Introduction, Rappels mathématiques (produit scalaire, distance Euclidienne, combinaison linéaire, base orthogonale ... etc.). Approximation des signaux par une combinaison linéaire de fonctions orthogonales. Séries de Fourier, Transformée de Fourier, Propriétés. Théorème de Parseval. Spectre de Fourier des signaux périodiques (spectre discret) et non périodiques (spectre continu).

CHAPITRE 3. Transformée de Laplace (3 Semaines)

Définition. Propriétés de la Transformée de Laplace. Relation signal/système. Application aux systèmes linéaires et invariants par translation ou SLIT (Analyse temporelle et fréquentielle).

CHAPITRE 4. Produit de Convolution (2 Semaines)

Formulation du produit de convolution, Propriétés du produit de convolution, Produit de convolution et impulsion de Dirac.

CHAPITRE 5. Corrélation des signaux (3 semaines)

Signaux à énergie totale finie. Signaux à puissance moyenne totale finie. Intercorrélation entre les signaux, Autocorrélation, Propriétés de la fonction de corrélation. Densité spectrale d'énergie et densité spectrale de puissance. Théorème de Wiener-Khintchine. Cas des signaux périodiques.



Sommaire

Chapitre 1. Généralités sur les signaux

1.1.	INTRODUCTION	9
1.2.	NOTION DE SIGNAL.....	10
1.3.	OPERATIONS SUR LES SIGNAUX	11
1.4.	NOTION DE BRUIT.....	12
1.5.	NOTION DE LA THÉORIE DU SIGNAL	13
1.6.	DOMAINE D'APPLICATIONS.....	13
1.7.	CLASSIFICATION DES SIGNAUX	15
1.7.1.	Classification dimensionnelle	15
1.7.2.	Classification phénoménologique	17
1.7.3.	Classification morphologique	21
1.7.4.	Classification énergétique	26
1.7.5.	Classification spectrale	28
1.8.	SIGNAUX USUELS(PARTICULIERS).....	33
1.8.1.	Fonction <i>signe</i>	33
1.8.2.	Fonction Échelon Unité	34
1.8.3.	Fonction <i>rampe</i>	34
1.8.4.	Fonction rectangle ou porte.....	35
1.8.5.	Fonction Rectangulaire Décalé.....	36
1.8.6.	Fonction triangle	37
1.8.7.	Impulsion de Dirac.....	38
1.8.8.	Peigne Dirac.....	39
1.8.9.	Fonction sinus cardinal.....	39

Chapitre 2. Analyse de Fourier

2.1.	INTRODUCTION	41
2.2.	ANALYSE FREQUENTIELLE (SPECTRALE) DES SIGNAUX A TEMPS CONTINU	42
	Analyse De Fourier	45



2.3.	LA SERIE DE FOURIER ET LES SIGNAUX PERIODIQUES A TEMPS CONTINU	46
2.3.1.	Définition de la série de Fourier complexe	46
2.3.2.	Les conditions de Dirichlet sont :	47
2.3.3.	Définition du spectre d'un signal.....	48
•	Spectres de fréquences	48
2.3.4.	Les harmoniques	50
2.3.5.	Définition de la série de Fourier en cosinus	50
2.3.6.	Densité spectrale de puissance	52
2.3.7.	Propriété de série de Fourier	55
2.4.	Les transformées de Fourier (Théorie et applications).....	57
2.4.1.	Les conditions de Dirichlet de la transformé de Fourier	58
2.4.2.	Densité spectrale d'énergie des signaux apériodiques	58
2.4.3.	Quelques propriétés de TF	60
2.4.4.	Quelques transformées de Fourier	60

CHAPITRE 3. Transformée de Laplace

3.1.	INTRODUCTION	63
3.2.	Systèmes Linéaires Continues	63
3.2.1.	Notion de système.....	63
3.2.2.	Principe de causalité	64
3.2.3.	Système continu	65
3.2.4.	Systèmes linéaires	65
3.2.5.	Système invariant.....	65
3.2.6.	La stabilité.....	65
3.3.	RELATION ENTREE/SORTIE	66
3.4.	PRODUIT DE CONVOLUTION	66
3.5.	REPONSES TEMPORELLES.....	67
3.6.	SYSTEMES LINEAIRES CONTINUES, DEFINITIONS ET CARACTERISATIONS Fréquentielles. 67	
3.6.1.	Transformée de Laplace :	67
3.7.	PROPRIETES :.....	68
3.8.	LA TRANSFORMEE DE LAPLACE INVERSE.....	69
	Transformée inverse	69



3.9.	Représentation par Fonction de transfert.....	70
3.9.1.	Définition d'un système linéaire :.....	70
3.9.2.	Fonction De Transfert	71
3.10.	UTILISATION DE TL POUR UNE RESOLUTION D'UNE EQUATION.....	72
3.10.1.	Équations différentielles.....	73
3.10.2.	Exemple Méthode De Résolution	73

CHAPITRE 4. Produit de Convolution

4.1.	INTRODUCTION	74
4.2.	CONVOLUTION DE DEUX FONCTIONS	75
4.3.	. Interprétation graphique de la convolution	75
4.5.	EXPLICATION GRAPHIQUE DU PRODUIT DE CONVOLUTION	78
4.8.	CONVOLUTION ET TRANSFORMEE DE LAPLACE.....	82
5.1.	INTRODUCTION	85
5.2.	CORRELATION DE SIGNAUX A ENERGIE FINIE.....	86
5.3.	CORRELATION DE SIGNAUX A PUISSANCE MOYENNE FINIE.....	86

CHAPITRE 5. Corrélation des signaux

5.4.	CORRELATION	87
5.4.1.	Autocorrélation	87
5.4.2.	L'inégalité de Cauchy-Schwartz permet d'écrire :.....	87
5.4.3.	Signaux périodiques.....	89
5.5.	INTER-CORRELATION	90
5.6.	RELATIONS DE WIENER-KHINTCHINE	93
5.7.	PROPRIETE DE CORRELATION.....	94
5.7.1.	Propriété de corrélation (signaux d'énergie finie)	94
5.7.2.	Propriété de corrélation (signaux à puissance moyenne finie).....	95
	Annexe	98
	Bibliographie	107

CHAPITRE 1:

GÉNÉRALITÉS SUR LES SIGNAUX

1.1. INTRODUCTION

Dans l'histoire du Far-West, les Indiens communiquaient entre eux avec des signaux de fumée (déjà du binaire), l'armée américaine avec des jeux de miroirs sur les sommets, l'armée française avec le télégraphe Chappe (inauguré pour annoncer au Directoire la victoire de la bataille de Valmy), ce réseau de pantins de bois articulés observés à la jumelle.

Nous avons maintenant le *signal*, support de l'information, moyen de communication des hommes entre eux et avec leur environnement. L'importance croissante du signal a conduit à une nouvelle discipline, le traitement du signal, dans laquelle sont associées l'électronique et la physique des ondes, les mathématiques fournissant des outils conceptuels.

Le signal, support de l'information, est devenu le moyen de communication des hommes, entre eux et avec leur environnement. L'objectif premier de ce chapitre est de faire apparaître la distinction entre signaux déterministes (ou certains) et signaux aléatoires, puis, dans un deuxième temps, leur classement en signaux à temps continu et signaux à temps discret.

Un signal est la représentation physique de l'information à transmettre d'une source à son destinataire. Il rend la communication techniquement possible. C'est une grandeur dont l'origine de la nature physique peut être électrique, acoustique, optique, etc.

La théorie du signal est l'étude mathématique de ces signaux, faisant totalement abstraction de leur nature. Un signal sera une fonction du temps $x(t)$ pouvant représenter une tension $v(t)$, une intensité $i(t)$, etc.

Ces signaux sont classés en deux grandes catégories : les signaux déterministes et les signaux aléatoires, eux-mêmes répartis en signaux continus et signaux discrets.

1.2. NOTION DE SIGNAL

Le **signal**, support de l'information, est devenu le moyen de communication des hommes, entre eux et avec leur environnement. L'objectif premier de ce chapitre est de faire apparaître la distinction entre signaux déterministes (ou certains) et signaux aléatoires, puis, dans un deuxième temps, leur classement en signaux à temps continu et signaux à temps discret.

Définition: variation d'une grandeur physique de nature quelconque porteuse d'information qui varie avec le temps, l'espace, ou tout autre variable ou variables indépendantes .

Mathématiquement, le signal est décrit comme une fonction à une ou plusieurs variables. Donc il constitue la manifestation physique d'une grandeur mesurable (courant, tension, force, température, pression, etc.). Les signaux sont des grandeurs électriques variant en fonction du temps $x(t)$ obtenues à l'aide de capteurs.

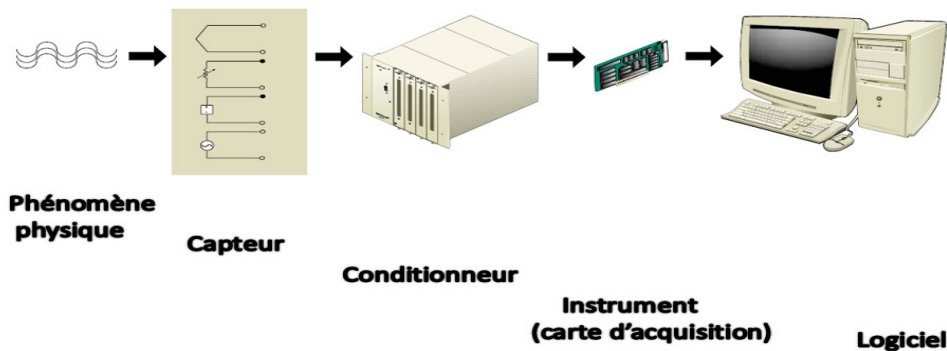


Figure 1.1 : La chaîne de mesures

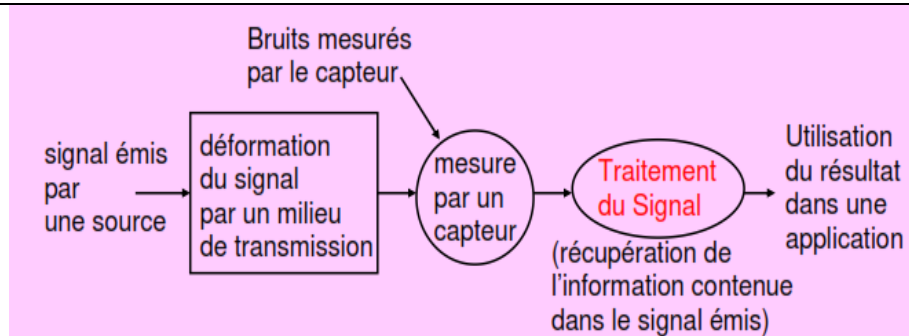


Figure 1.2 :Schéma typique du Traitement du Signal

1.3. OPERATIONS SUR LES SIGNAUX

Les opérations sur les signaux consistent en l'étude du signal dans l'espace du temps et l'espace des fréquences associé (transformation de Fourier). Les trois distributions de base : impulsion (Dirac), échelon (Heaviside) et porte. La multiplication des signaux (ou modulation) et le produit de convolution : opérations duales entre l'espace-temps et l'espace fréquences qui conduisent aux théorèmes de Plancherel et Parseval, dits théorèmes de la transmission des signaux dans les systèmes de télécommunications.

➤ Exemple Signaux monodimensionnels périodiques

Le signal variable le plus simple est le signal sinusoïdal

$$s(t) = a \sin(2\pi f_0 t) \text{ avec } f_0 = 1/T_0 \quad (1.1)$$

Deux paramètres le caractérisent : son amplitude a et sa fréquence f_0 .

En changeant l'origine des temps en t_0 , on obtient :

$$s(t) = a \sin(2\pi f_0 (t - t_0)) \text{ avec } \varphi = 2\pi f_0 t_0 \quad (1.2)$$

f_0 désigne la phase, troisième paramètre permettant de décrire complètement la sinusoïde.

Comme autre exemple les fonctions :

$$s_1(t) = 5t$$

$$s_2(t) = 20t^2$$

Décrivent deux signaux, un qui varie linéairement avec la variable indépendante le temps t , le deuxième varie de manière quadratique.

Un autre, considérant la fonction

$$s(x, y) = 3x + 2xy + 10y^2$$

Cette fonction décrit un signal à deux variables indépendantes x et y qui peuvent représenter deux coordonnées spatiales dans le plan.

1.4. NOTION DE BRUIT

Le bruit est défini comme tout phénomène perturbateur gênant la perception ou l'interprétation d'un signal, par analogie avec les nuisances acoustiques (interférence, bruit de fond, etc.). La différenciation entre le signal et le bruit est artificielle et dépend de l'intérêt de l'utilisateur : les ondes électromagnétiques d'origine galactique sont du bruit pour un ingénieur des télécommunications par satellites et un signal pour les radioastronomes.

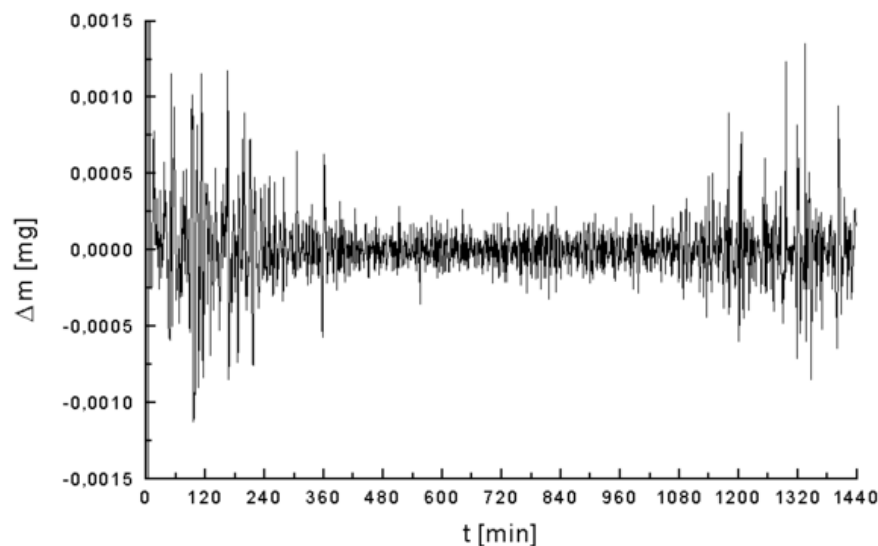


Figure 1.3. : Le bruit

Remarque :

Les notions de signal et bruit sont très relatives. Pour un technicien des télécommunications qui écoute un émetteur lointain relayé par un satellite, le signal provenant d'une source astrophysique (soleil, quasar*) placée malencontreusement dans la même direction est un bruit. Mais pour l'astronome qui s'intéresse à la source astrophysique, c'est le signal du satellite qui est un bruit.

1.5. NOTION DE LA THÉORIE DU SIGNAL

La théorie du signal a pour objectif fondamental la "description mathématique" des signaux. Cette représentation commode du signal permet de mettre en évidence ses principales caractéristiques (distribution fréquentielle, énergie, etc.) et d'analyser les modifications subies lors de la transmission ou du traitement de ces signaux.

La théorie du signal est l'ensemble des outils mathématiques qui permet de décrire les signaux et les bruits émis par une source, ou modifiés par un système de traitement.

1.6. DOMAINE D'APPLICATIONS

Le traitement du signal intervient sous plusieurs formes dans la plupart des domaines de la technologie, Applications (dès qu'on mesure un signal et qu'on veut en extraire des informations pour les utiliser dans une application !) :

- Onde acoustique : courant délivré par un microphone (parole, sons musicaux)
- Génie biomédical Signaux ECG, EEG
- Imagerie médicale
- Reconnaissance de formes
- Optique
- Images
- Contrôle de processus industriels (mécanique, aéronautique, astronautique, etc.)
- Traitement de la parole et transmission
- Traitement des images fixes, vidéos, vision artificielle ;
- Hydraulique

- Télécommunications (reconnaissance de la parole, téléphonie mobile, codage vidéo et audio en visiophonie, radars, Mesures physiques, Sonar, géophysique).
- Analyse du sous-sol (ondes sismiques, recherche pétrolière...)
- Aide au diagnostic médical (EEG, ECG, ...), Signaux Biomédicaux, imagerie médicale.
- Compression mp3, jpeg, mpeg, divx

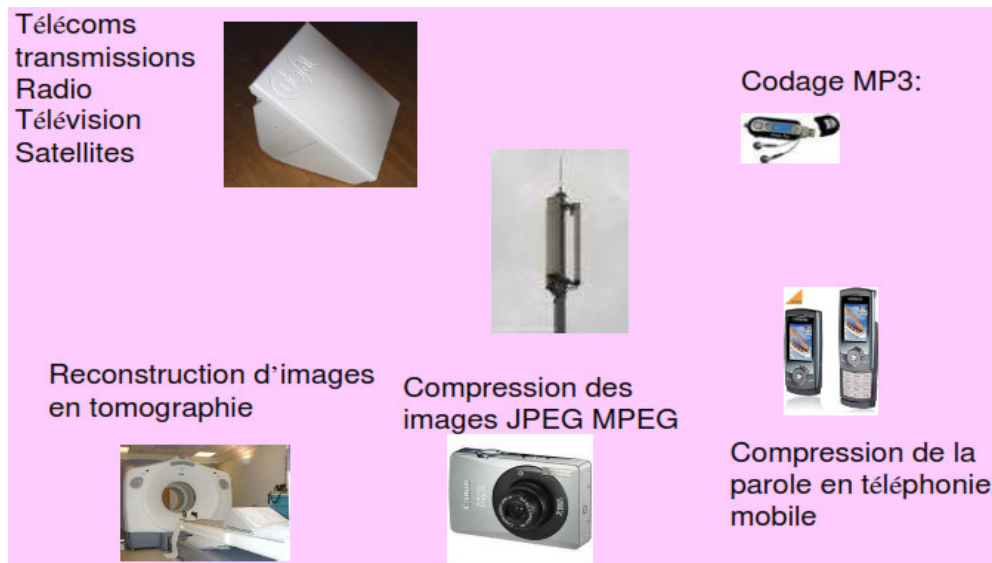


Figure 1.4 : Exemples d'utilisation quotidienne de techniques de traitement du signal

* : Astre très brillant situé hors de la galaxie et comparable à une étoile

Pour tenter de résoudre les problèmes :des algorithmes (méthodes numériques) très variés, parfois complexes mais souvent fondés sur des bases fondamentales ont été appliqués.

- analyse en fréquence
- filtrage linéaire (par exemple lissage)(décomposition du signal étudié en une somme de sinusoides)
- signaux bruités : notions sur les signaux aléatoires.

Exemples :

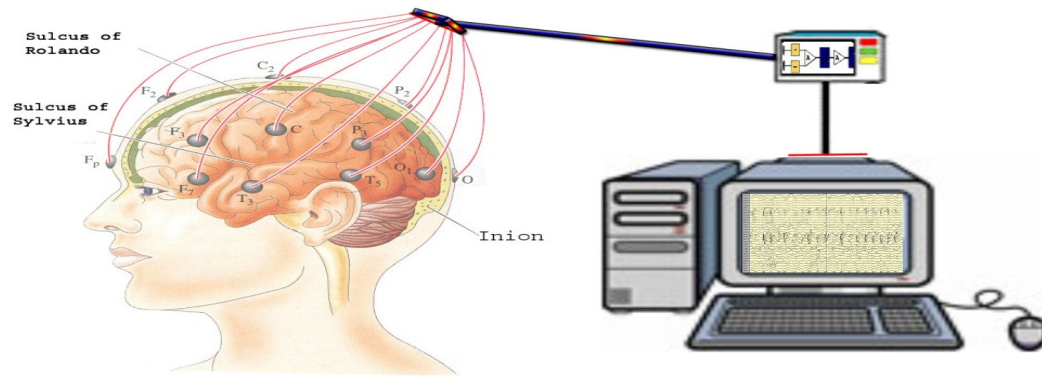


Figure 1.5 :Electroencéphalographie

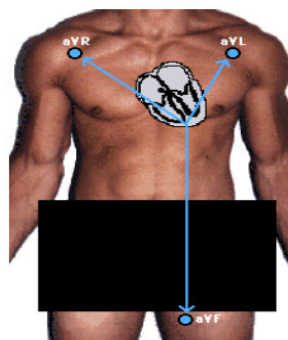


Figure 1.6 :Electrocardiogramme (ECG) : l'enregistrement de l'activité électrique du cœur

1.7. CLASSIFICATION DES SIGNAUX

Pour faciliter l'étude des signaux, différents modes de classification peuvent être envisagés :

1.7.1. Classification dimensionnelle

- **Signal monodimensionnel 1D :**

Fonction d'un unique paramètre pas forcément le temps

- exemple: courbe de température

Tension électrique $v(t)$ = signal unidimensionnel

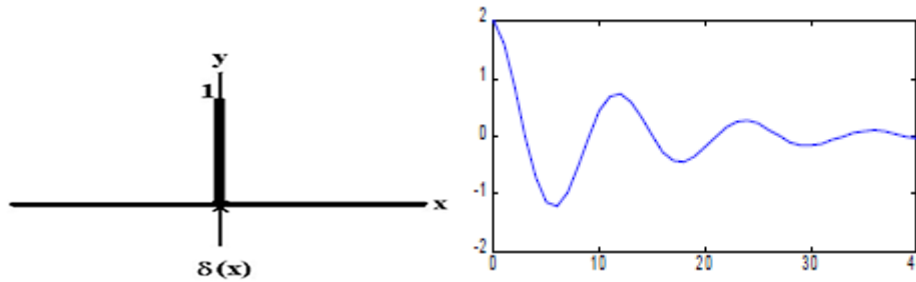


Figure 1.7: Exemple signal monodimensionnelle 1D

- **Signal bidimensionnelle 2D**

exemple : Image statique niveaux de gris \Leftrightarrow luminance $I(x,y)$ = signal bidimensionnel dépendant de deux paramètres

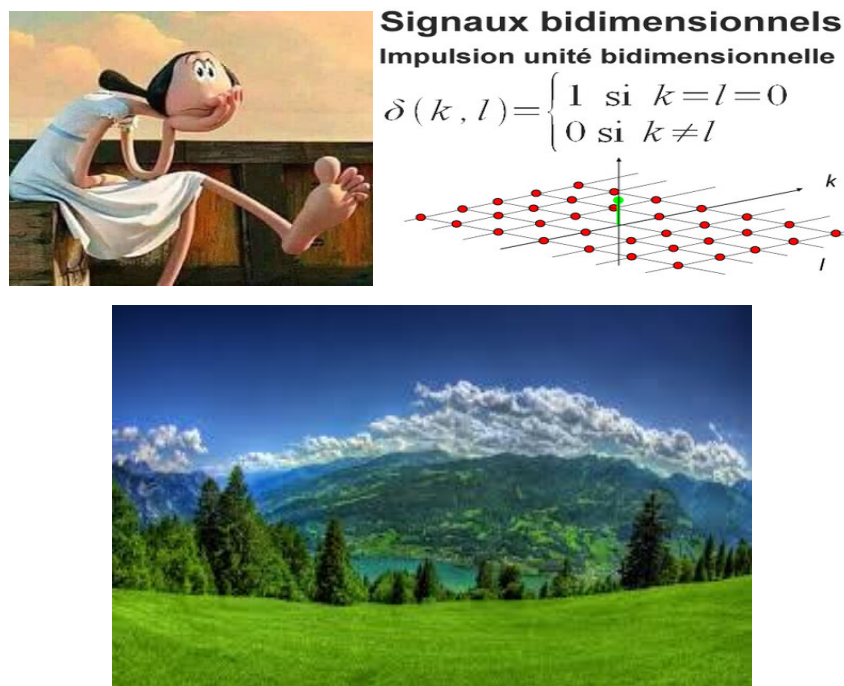


Figure 1.8: Exemplesignal bidimensionnelle 2D

- **Signal tridimensionnel :**

Dépendant de trois paramètres (exemple vidéo)

Séquence d'images $\Leftrightarrow I(x,y,t) = \text{signal tridimensionnel}$



Figure 1.9 : Exemple signal tridimensionnelle 3D

1.7.2. Classification phénoménologique

Cette classification se fait selon le caractère déterministe ou aléatoire.

- **Signal déterministe** décrivent l'aspect énergétique du signal. On parle du carré du signal.

Les signaux déterministes sont des signaux dont l'évolution, en fonction de la variable indépendante, peut être prédite par une représentation mathématique appropriée.

Parmi les signaux déterministes, on distingue :

- Les signaux périodiques, satisfaisant à la relation :

$$x(t) = x(t + kT) \quad (1.3)$$

avec k entier qui obéissent à une loi de répétition cyclique régulière, de période T

- Les signaux non périodiques, qui ne jouissent pas de cette propriété.
- **Signaux déterministes** : L'aspect énergétique du signal. D'une manière très impropre, nous dirions au *carré du signal*. Les fonctions de carré intégrable correspondront à des signaux d'énergie finie, les autres à des signaux de puissance moyenne finie. Importance des fonctions d'auto-corrélation et inter-corrélation. Densité spectrale d'énergie (ou de puissance).

Exemples de Signaux déterministe :

Les signaux sinusoïdaux sont un cas particulier de ces signaux qui sont périodiques :

$$s(t) = A \sin\left[\left(\frac{2\pi}{T}\right)t + \varphi\right]$$

Les signaux non périodiques suivant sont des cas particuliers :

$$x(t) = e^{-at} \text{ pour } t > 0 \text{ sinon } x(t) = 0;$$

$$y(t) = t \text{ pour } t > 0 \text{ sinon } t < 0;$$

$$z(t) = 1$$

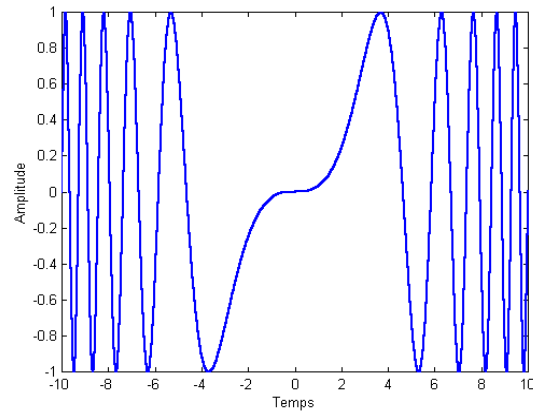
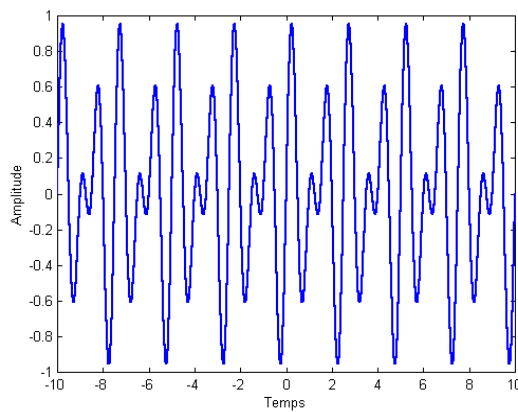


Figure 1.10 : Signal Périodiques **Figure 1.11 : Signal Apériodiques**

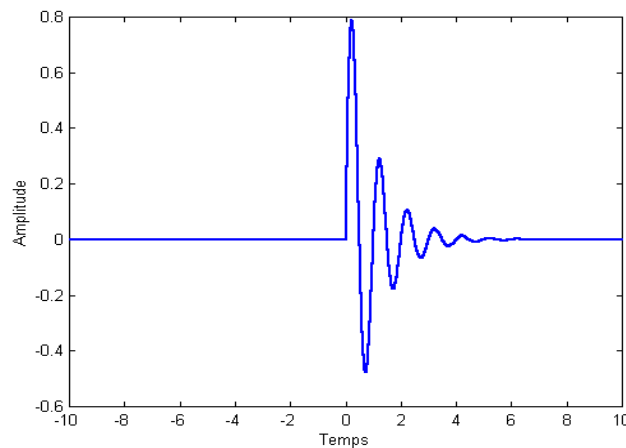


Figure 1.12 : Signal Transitoires

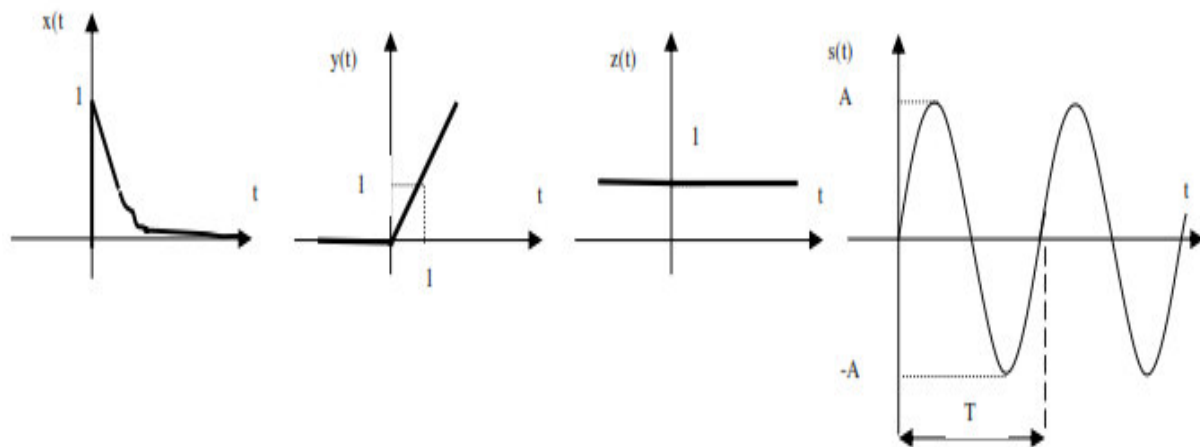


Figure 1.13 : Exemples de Signaux déterministes

- **Signaux aléatoires**

Signaux dont l'évolution temporelle est imprévisible et dont on ne peut pas prédire la valeur à un temps t . (**comportement imprévisible \Rightarrow description statistique**). La description est basée sur les propriétés statistiques des signaux (moyenne, variance, loi de probabilité, ...)

Remarque: tout signal physique comporte une *composante* aléatoire (perturbation externe, phénomène quantique ...)

Les signaux aléatoires ne possèdent pas de telles représentations. Ils sont caractérisés par leurs propriétés statistiques et fréquentielles.

Exemple : les numéros du loto, les cours de la bourse, etc.

Parmi les signaux aléatoires on distingue :

- **Les signaux stationnaires :**

Ce signal possède des caractéristiques statistiques invariantes au cours du temps.

(les statistiques sont indépendantes du temps)

- **Ergodiques** (une réalisation du signal permet d'estimer les statistiques)
- **non ergodiques**

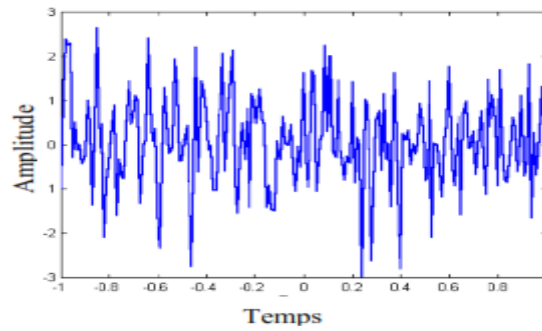


Figure 1.14 : Signal Stationnaire

- Les signaux non stationnaires

Un signal est non stationnaire si ses caractéristiques statistiques varient au cours du temps.

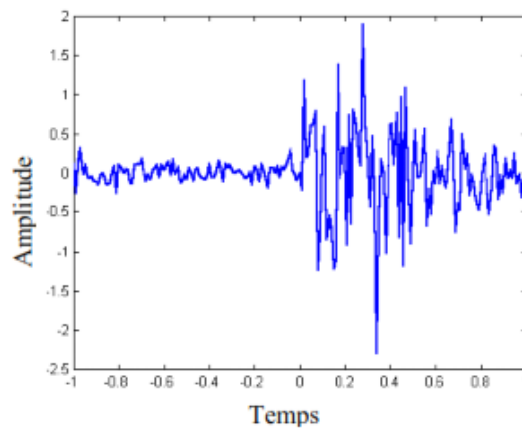


Figure 1.15 : Signal Non stationnaire

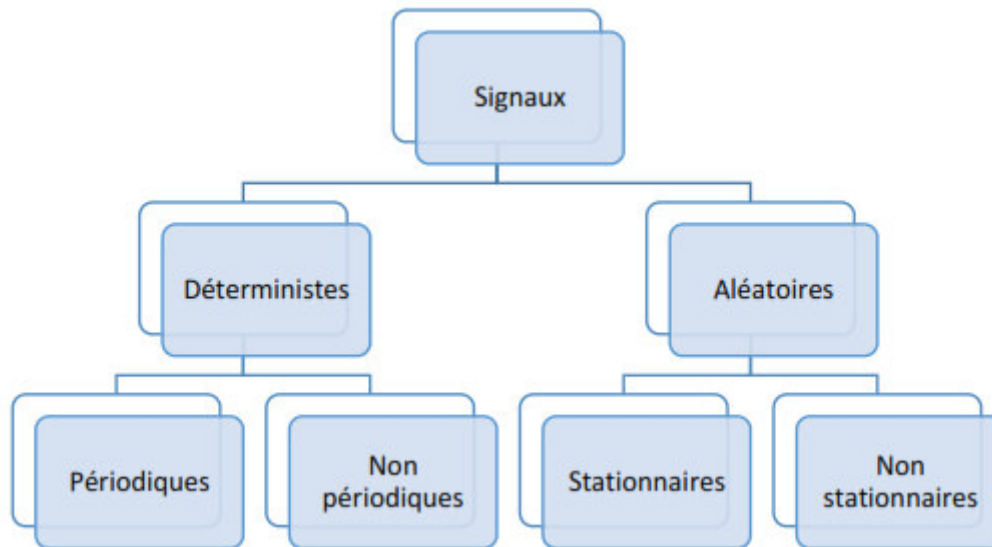


Figure 1.16 : Classification phénoménologique des signaux.

1.7.3. Classification morphologique

- Selon leur nature discrète ou continue.

Les informations transmises peuvent être réparties en 2 grandes catégories :

- Les données **discrètes**, l'information correspond à un assemblage d'une suite d'éléments **indépendants** les uns des autres (c'est une suite **discontinue** de valeurs) et dénombrable (c'est un ensemble fini).

Par exemple : un texte, qui est un ensemble de lettres (ou de symboles) qui forment des mots.

- Les données **continues** ou **analogiques** : résultent de la variation continue d'un phénomène physique.

Exemple : le son se propage dans l'air sous forme d'une onde de pression, transmise par le mouvement des molécules.

En gros c'est une déformation de l'air dû à un phénomène physique, nos oreilles, entre autres, vont capter cette vibration, la transmettre à notre cerveau qui la traduit en son.

Ce signal varie dans le temps, de manière continue (c'est à dire que son intensité, sa fréquence peuvent prendre n'importe quelle valeur) : on dit qu'il est **analogique**

Définition : Signal « à temps continu » = signal susceptible d'être observé et mesuré à chaque instant.

La plupart des phénomènes physiques (en tous cas les phénomènes naturels) sont de nature continue.

Définition : Le signal est dit « à temps discret » lorsqu'il est défini et susceptible d'être mesuré à des certains instants seulement.

Les signaux continus et échantillonnés à *intervalles réguliers* font partie de cette catégorie.

Signal	Fréquence d'échantillonnage
parole	8 kHz (téléphonie)
	16 kHz (conférence audio)
Audio	32 kHz
	44,1 kHz
	48 kHz
Vidéo	Environ 10 MHz (définition PAL)

Tableau 1.1 : Quelques fréquences d'échantillonnage repères

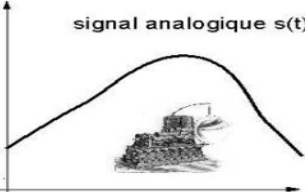
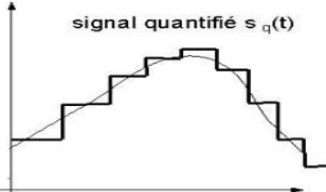
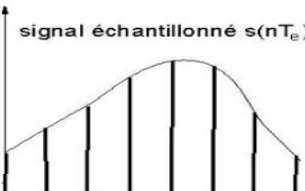
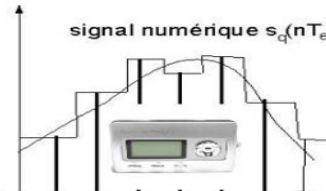
TEMPS	CONTINU	←	DISCRET
AMPLITUDE			
CONTINU	signal analogique $s(t)$ 		signal quantifié $s_q(t)$ 
↑ QUANTIFICATION ↑			
DISCRET	signal échantillonné $s(nT_e)$ 		signal numérique $s_q(nT_e)$ 

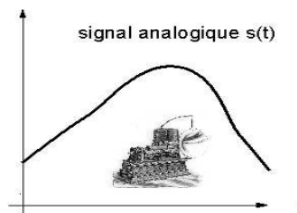
Tableau 1.2 : Les quatre types de signaux classés suivant leur morphologie (continue ou discrète)

Du support, le temps pour un signal

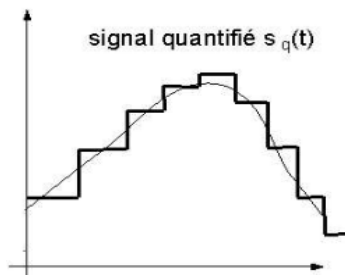
De l'espace de ses valeurs (Amplitude)



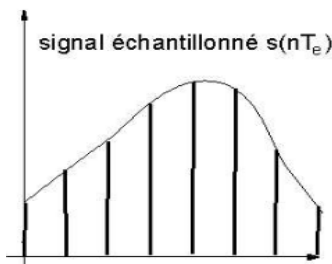
4 combinaisons Temps/Amplitude explicites dans le tableau ci-dessus



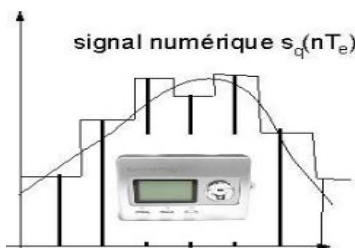
signal à amplitude et temps continus (**signal analogique**) : $s(t)$



signal à amplitude discrète et temps continu (**signal quantifié**) : $s_q(t)$. Ce signal correspond à celui qui est fourni à la sortie d'un circuit convertisseur numérique analogique pour la commande d'un actionneur q



signal à amplitude continue et temps discret (signal échantillonné) : $s(nT_e)$. Ce signal, obtenu à l'aide d'un circuit échantillonneur bloqueur, est transmis à un circuit convertisseur analogique numérique pour obtenir un signal numérique utilisable par un ordinateur



signal à amplitude discrète et temps discret (**signal logique ou numérique**) : $s_q(nT_e)$.

- **Signal analogique ou continu**

- Il représente l'évolution d'une grandeur physique
- Souvent transformée en une tension électrique $u(t)$ à la sortie d'un capteur
- Il est défini **à tout instant t**.

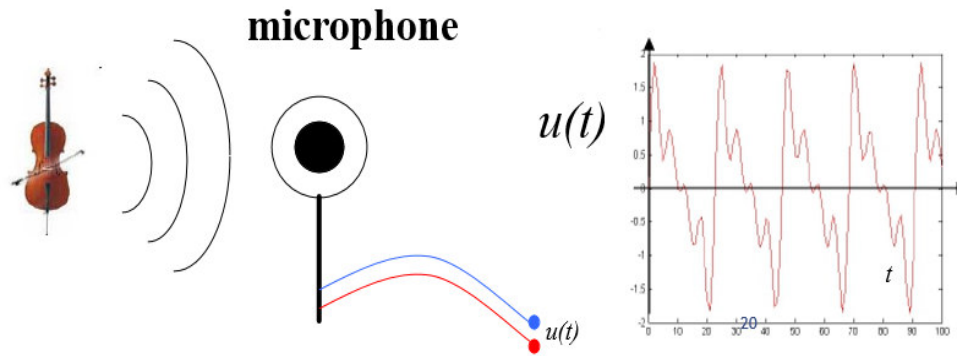


Figure 1. 17: Exemple signal analogique.

De nos jours, il faut souvent convertir les signaux analogiques naturels en valeurs numériques et inversement. Le dispositif le plus général de mise en œuvre du traitement numérique du signal est ce qu'on appelle une chaîne de traitement du signal.

L'exemple choisi dans la diapositive suivante concerne le traitement du son, grandeur purement analogique.

Il regroupe tous les composants d'une chaîne de traitement de l'information telle qu'on peut la rencontrer dans l'industrie ou le laboratoire pour le traitement d'autres grandeurs analogiques.

- **Chaîne de traitement du numérique du signal**

Le signal analogique subit les traitements suivants : Il est d'abord amplifié par un amplificateur analogique.

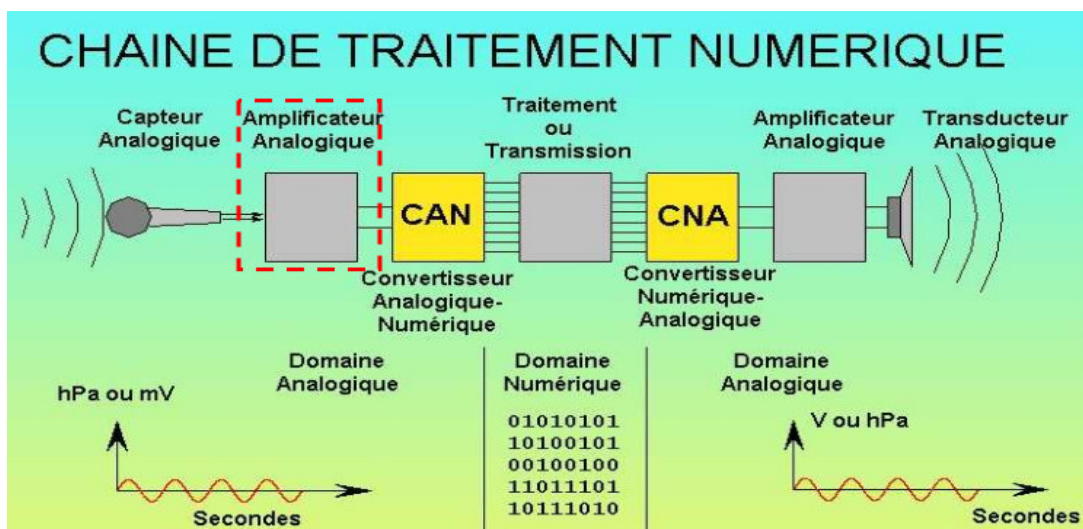


Figure 1.18 : chaîne de traitement du numérique du signal

Il est d'abord amplifié par un amplificateur analogique

Un CONVERTISSEUR ANALOGIQUE-NUMÉRIQUE convertit le signal analogique en signal numérique.
(Le nombre de bits générés est une caractéristique du convertisseur employé).

Le signal est acheminé par un "bus" qui compte autant de fils que de bits, vers l'unité de traitement numérique (ordinateur).

Le traitement peut être une simple mesure de la grandeur (déclenchement d'une alarme en cas de dépassement) jusqu'aux opérations complexes de filtrage et compression des sons.

Le traitement numérique a souvent pour but de générer des signaux de sortie pour commander des moteurs en commande analogique, ouvrir des vannes analogiques (progressives), etc..

Dans le cas du son, notre exemple, il doit être reproduit par une chaîne comprenant un amplificateur final et haut-parleurs. Mais ces actionneurs sont tous analogiques et l'ordinateur ne "parle" que numérique. Pour cela on prévoit en sortie de l'unité de traitement un CONVERTISSEUR NUMÉRIQUE-ANALOGIQUE qui, comme son nom l'indique transformera le signal multi-bits en signal analogique final.

1.7.4. Classification énergétique

Dans ce cas, on distingue deux classes de signaux, à savoir:

- Les signaux à énergie totale finie

$$E_X < \infty \quad (1.4)$$

- Les signaux à puissance moyenne totale finie (non nulle)

$$0 < P_X < \infty \quad (1.5)$$

Définitions :

Pour un signal $x(t)$, l'énergie totale est donnée par:

$$E_X = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt \quad (1.6)$$

et sa puissance moyenne totale est exprimée par:

$$P_X = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt \quad (1.7)$$

Exemples :

1- $x_1(t)$ est un signal à énergie totale finie.

$$x_1(t) = \begin{cases} \exp(-t) & t \geq 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

2- $x_2(t)$ est un signal à puissance moyenne totale finie

$$x_2(t) = \cos(\omega_0.t)$$

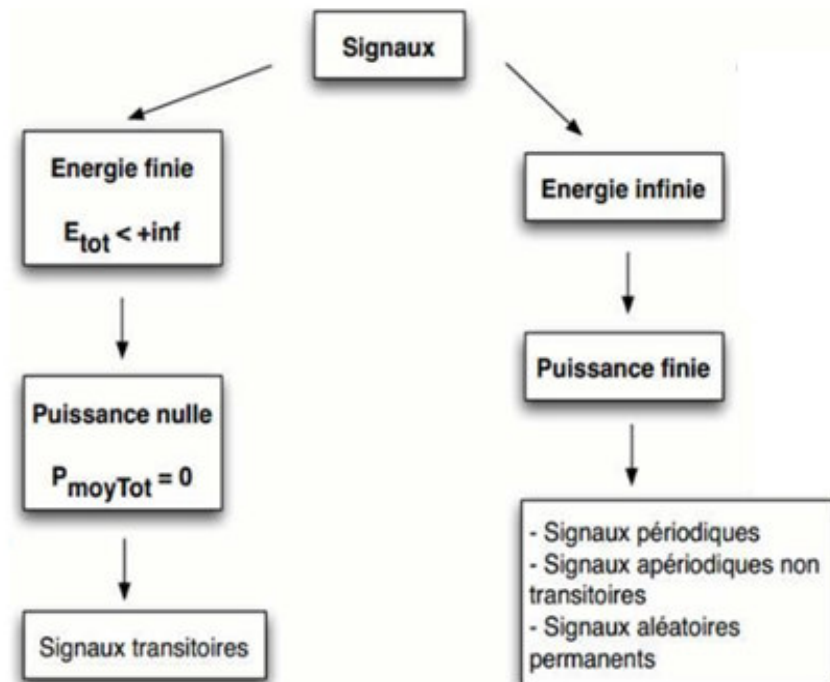


Figure1.19 : Classification énergétique

Remarques

- On peut trouver des signaux théoriques qui ne sont pas à énergie totale finie ni à puissance moyenne totale finie, par exemple :

$$x(t) = \exp(t) \text{ pour } -\infty < t < +\infty \leftrightarrow E_x = +\infty, P_x = +\infty$$

Les signaux peuvent être soit à énergie totale finie ou à puissance moyenne totale finie;

Les signaux périodiques sont des signaux à puissance moyenne totale finie;

Les signaux transitoires sont des signaux à énergie totale finie.

1.7.5. Classification spectrale

Dans cette catégorie de classification, le signal est classifié selon la bande de fréquence qu'il occupe. Dans ce cas, on peut distinguer plusieurs classes :

- ▶ Signaux BF (**Basses Fréquences**),
- ▶ Signaux HF (**Hautes Fréquences**),
- ▶ Signaux à bande transposée (Passe bande),
- ▶ Signaux à bande étroite,
- ▶ Signaux à bande large,...

La largeur de bande ΔF représente le domaine des fréquences occupés par le spectre du signal étudié.

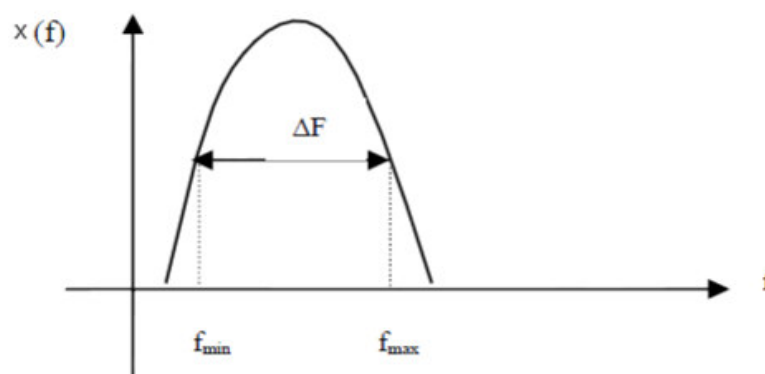


Figure 1.20 : Exemple d'une largeur de bande d'un signal

Largeur de bande : $\Delta F = f_{max} - f_{min}$

✓ **Signaux de basses fréquences (BF)** : ils sont des signaux dont la largeur de bande est située dans les faibles fréquences, où $f_{min} = 0$ ou proche de zéro.

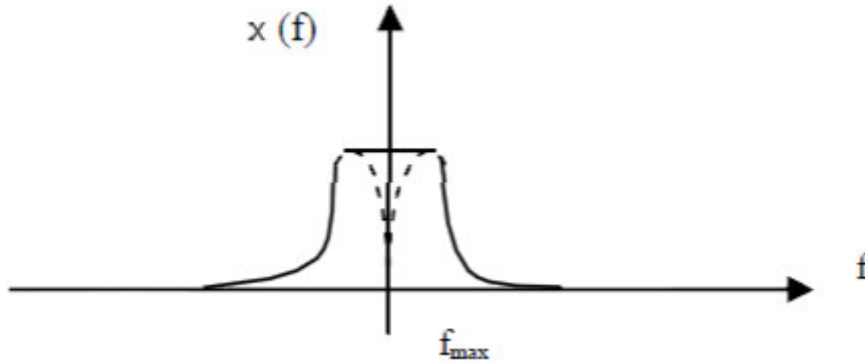


Figure 1.21 : Exemple de signaux de basses fréquences

✓ **Signaux de hautes fréquences (HF)** : ils sont des signaux dont la largeur de bande est située dans des fréquences élevées.

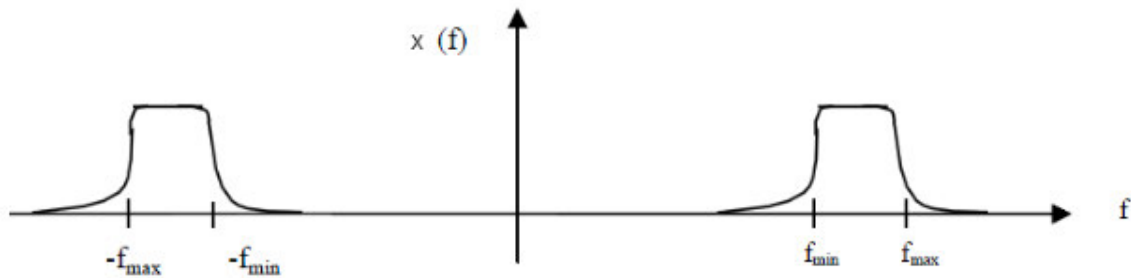


Figure 1.22 : Exemple de signaux de hautes fréquences

✓ **Signaux à bande étroite ($f_{max} \approx f_{min}$)** : ils sont des signaux dont la largeur de bande est relativement courte.

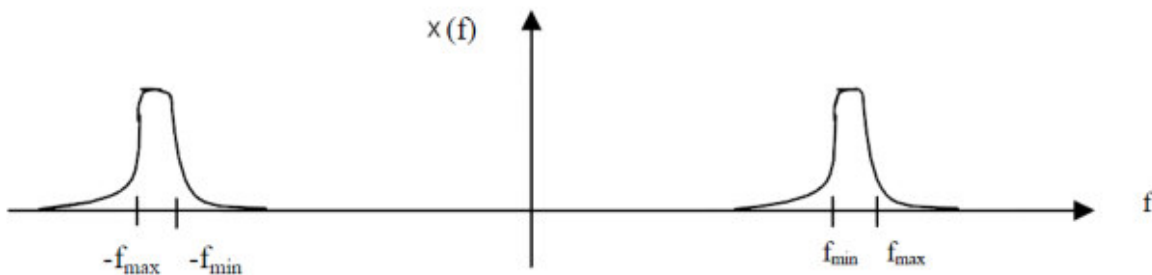


Figure 1.23: Exemple de signaux de bande étroite

✓ **Signaux à large bande** ($f_{max} \gg f_{min}$) : ils sont des signaux dont la largeur de bande est relativement étendue voire infinie.

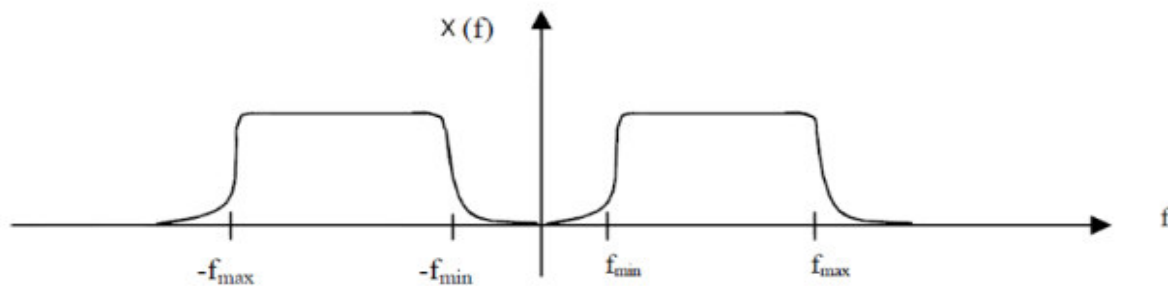


Figure 1.24 : Exemple de signaux à large bande

Remarque :

- On peut trouver d'autres modes de classification selon l'intérêt et l'utilité de la classification désirée, par exemple, on peut classer les signaux selon le mode de causalité. Dans cette classification, on trouve :

a) *Les signaux causals,*

b) *Les signaux anti-causals,*

c) *Les signaux non-causals.*

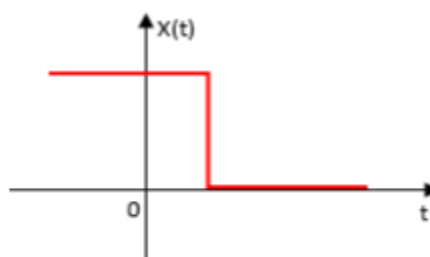


Figure 1.25 : Exemple d'un signal non causal

Définitions : Un signal est dit **causal** s'il est défini seulement pour $t \geq 0$

Un signal est dit **anti-causal** s'il est défini seulement pour $t < 0$, et il est dit non-causal s'il est défini pour $t \geq 0$ et $t < 0$.

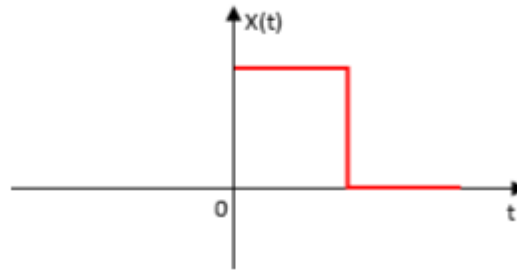


Figure 1. 26 : Exemple d'un signal causal

Signaux causals :

Un signal est dit causal s'il est nul pour toute valeur négative du temps $X(t) = 0$ pour $t < 0$.

On peut le rendre causal si $*U(t)$.

- **Signaux pairs et impaires :**

Un signal est pair si $x(t) = x(-t)$ exemple : $\cos(\omega t)$

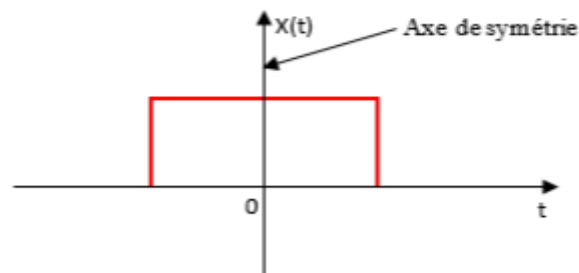


Figure 1. 27 : Exemple d'un signal pair

Un signal est impair si $x(t) = -x(-t)$

exemple : $\sin(\omega t)$

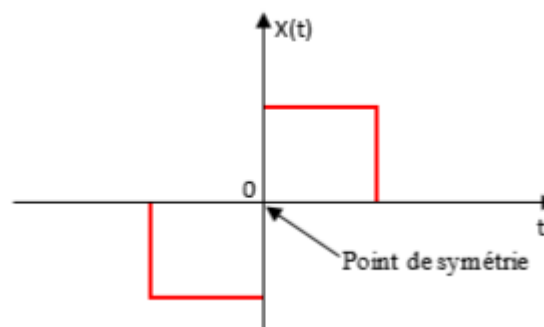


Figure 1. 28:Exemple d'un signal impair

Remarque tout signal réel peut être décomposé : une partie « **paire** » et une partie « **impaire** ».

$$x(t) = x_p(t) + x_i(t) \quad (1.8)$$

• **Operations sur les signaux**

A. Décalage temporel

-Décalage vers la droite qui représente le retard est : $x(t) = x(t - t_0)$

-Décalage vers la gauche qui représente la prédiction est : $x(t) = x(t + t_0)$

Avec $t_0 = T$

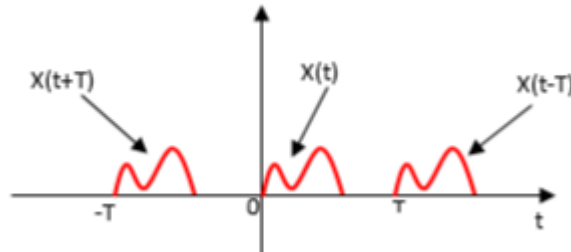


Figure 1.29 : Exemple d'un décalage temporel du signal

B. Réflexion (Effet miroir)

La réflexion d'un signal est exprimée par : $y(t) = x(-t)$

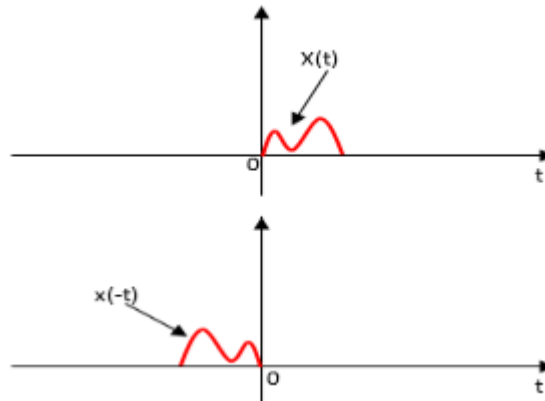


Figure 1.30 : Exemple d'une réflexion d'un signal

C. Dilatation et compression

La dilatation ou compression d'un signal est exprimée par : $y(t) = x(at)$

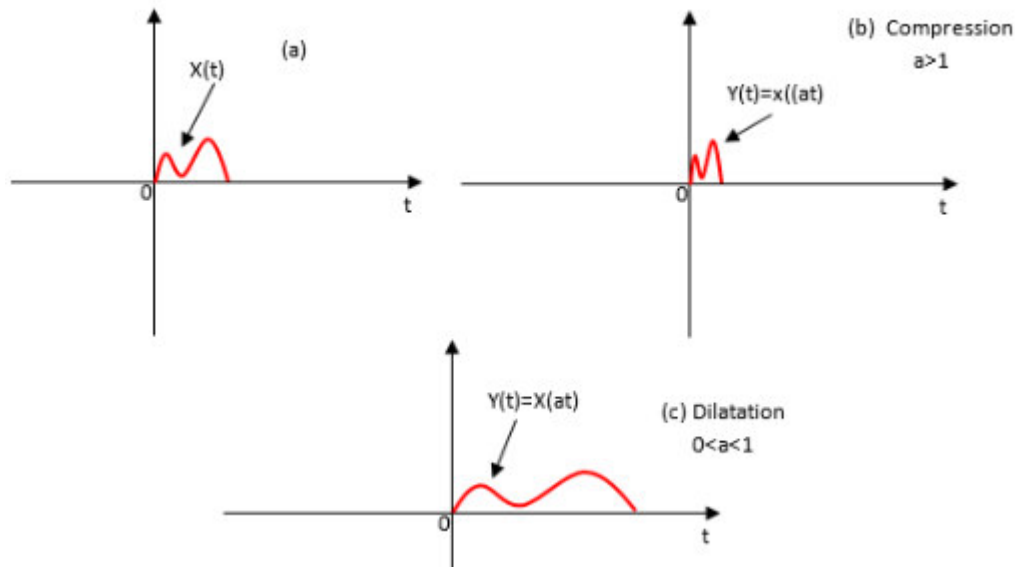


Figure 1.31 : (a) Exemple d'un signal sans dilatation ni compression ; (b) Exemple d'un signal compressé ; (c) Exemple d'un signal dilaté

D.Signal de durée finie (signal borné dans le temps)

Un signal est de durée finie s'il est nul dans un intervalle prescrit $T : (t)=0, \notin T$. Cessignaux sont également appelés signaux à support borné.

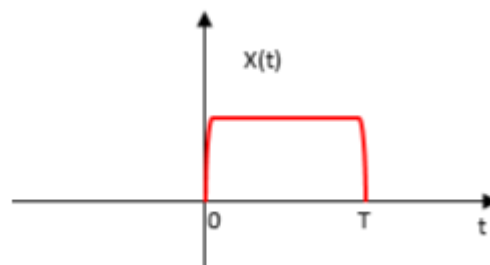


Figure 1.32 :Exemple d'un signal borné

1.8. SIGNAUX USUELS(PARTICULIERS)

1.8.1. Fonctionsigne

Définition: (Fonction Signe) La fonction signe, notée sgn est une fonction réelle de la variable réelle définie par :

$$\text{Sgn}(t) = \begin{cases} -1 & \text{pour } t < 0 \\ 1 & \text{pour } t > 0 \end{cases} \quad (1.9)$$

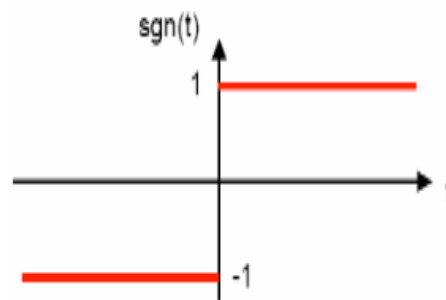


Figure 1.33 : fonction signe

1.8.2. Fonction Échelon Unité

Définition: (Fonction échelon unité) La fonction échelon unité, ou simplement échelon ou fonction de Heaviside, notée $u(t)$, est une fonction réelle de la variable réelle définie par :

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ 1 & \text{pour } t \geq 0 \end{cases} \quad (1.10)$$

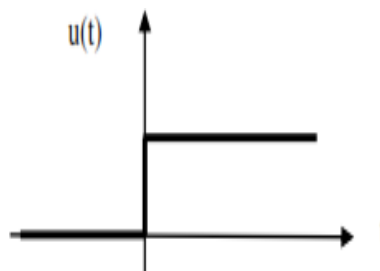


Figure 1.34: échelon unitaire

1.8.3. Fonction rampe

Définition : (Fonction rampe) La fonction rampe, notée r , est une fonction réelle de la variable réelle définie par : $r(t) = \int_{-\infty}^t u(s) ds$

Cette fonction est aussi définie par :

$$r(t) = t \cdot u(t)$$

$$d'o\grave{u} r(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t \leq 0 \\ t & \text{pour } t > 0 \end{cases} \quad (1.11)$$

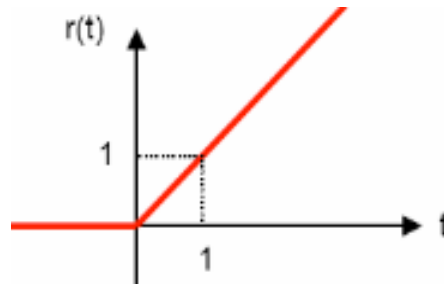


Figure 1.35: Fonction rampe

1.8.4. Fonction rectangle ou porte

Définition : (Fonction rectangle unité) La fonction rectangle, ou fonction porte, de largeur 1, notée *rect*, est une fonction réelle de la variable réelle définie par :

$$rect(t) = u\left(t + \frac{1}{2}\right) - u\left(t - \frac{1}{2}\right)$$

$$rect(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } |t| < \frac{T}{2} \\ 0 & \text{pour } |t| > \frac{T}{2} \end{cases} \quad (1.12)$$

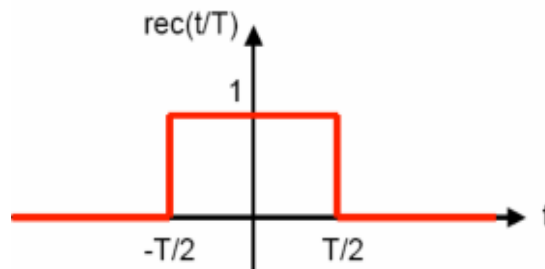


Figure1.36 : Fonction porte

On remarque que l'aire de la fonction rectangle de largeur unité vaut 1.

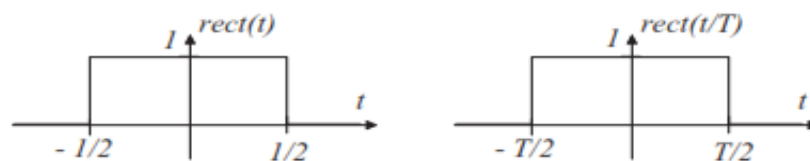


Figure 1.37: Représentation simplifiées des fonctions rectangle de largeur unité de de largeur T

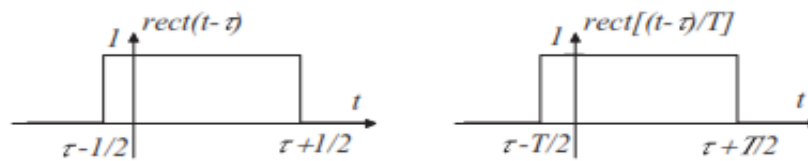


Figure 1.38 : Fonctions rectangle de largeur unité de de largeur T , translatées de τ

1.8.5. Fonction Rectangulaire Décalé

La deuxième écriture du signal rectangulaire est :

$$rect(t) = u\left(t - \left(-\frac{T}{2}\right)\right) - u\left(t - \frac{T}{2}\right) = u\left(t + \frac{T}{2}\right) - u\left(t - \frac{T}{2}\right) \quad (1.13)$$

D'une manière générale pour une impulsion rectangulaire d'amplitude A , de durée T centré en $t = \tau$

$$x(t) = A \cdot rect\left[\frac{(t - \tau)}{T}\right]$$

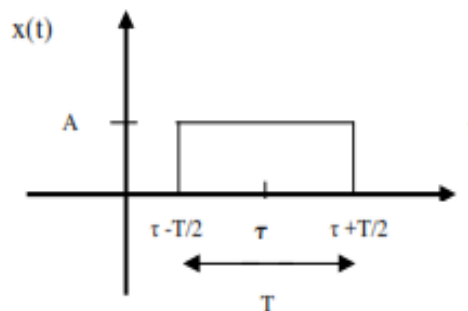


Figure 1.39 : Fonctions rectangle translatées de τ

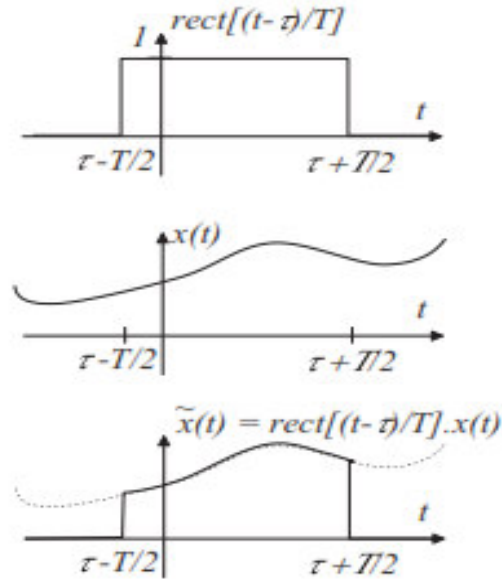


Figure 1.40 : Utilisation de la fonction rectangle pour prélever un morceau de signal

1.8.6. Fonction triangle

Définition: (Fonction triangle) La fonction triangle unité, notée tri, est une fonction réelle de la variable réelle définie par :

$$\begin{cases} tri(t) = 1 - |t| & \text{si } |t| < 1 \\ tri(t) = 0 & \text{si } |t| > 1 \end{cases} \quad (1.14)$$

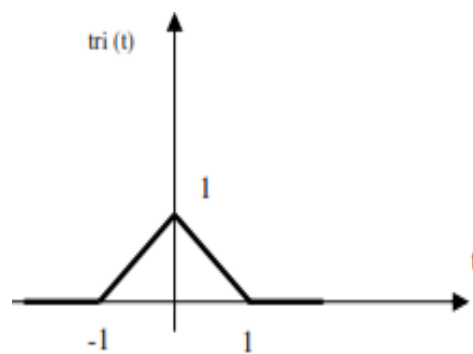


Figure 1.41 : Fonction triangulaire

Remarque : Cette fonction triangle est très usuelle. Nous verrons dans les chapitres suivants qu'elle intervient notamment dans le résultat du produit de convolution de deux fonctions rectangle, ou dans l'auto-corrélation d'un signal rectangle.

1.8.7. Impulsion de Dirac

Définition(Impulsion de Dirac) La distribution ou impulsion de Dirac, notée $\delta(t)$, vérifie :

$$\begin{cases} \delta(t) = 0, & \text{si } t \neq 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(u) du = 1 \end{cases}$$

L'impulsion de Dirac correspond à une fonction porte dont la largeur T tendrait vers 0 et dont l'aire est égale à 1.

$$\delta(t) \begin{cases} 1 & \text{pour } t = 0 \\ 0 & \text{pour } t \neq 0 \end{cases} \quad (1.15)$$

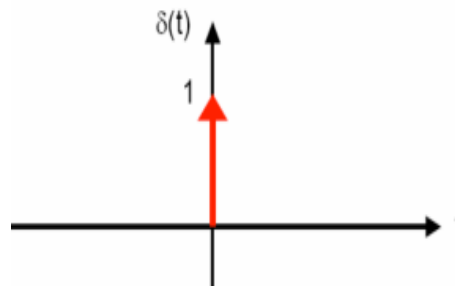


Figure 1.42 : impulsion de Dirac

► **Propriété d'impulsion de Dirac**

✓ **Intégrale**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot \delta(t) dt = x(0)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \delta(t - t_0) dt = x(t_0)$$

✓ **Produit**

$$x(t) \delta(t) = x(0) \cdot \delta(t) = x(0)$$

$$x(t) \delta(t - t_0) = x(t_0) \delta(t - t_0) = x(t_0)$$

✓ **Identité**

$$x(t) * \delta(t) = x(t)$$

✓ **Translation**

$$x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$$

$$x(t - t_1) * \delta(t - t_0) = x(t - t_1 - t_0)$$

1.8.8. Peigne Dirac

On appelle peigne de Dirac une succession périodique d'impulsions de Dirac. T est la période du peigne.

Cette suite est parfois appelée fonction d'échantillonnage ou train d'impulsions.

$$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT) \quad (1.16)$$

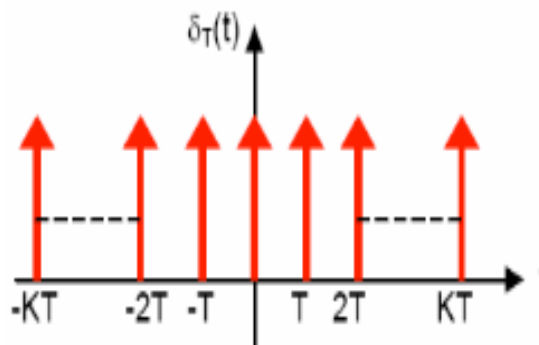


Figure 1.43 : Peigne Dirac

1.8.9. Fonction sinus cardinal

Cette fonction est très courante en traitement du signal où elle intervient comme transformée de Fourier d'une fonction rectangle. Une fonction rectangle permet de représenter par exemple des opérateurs idéaux de filtrage. La fonction *sinus cardinal*, notée **sinc(u)**, est définie :

Définition :

La fonction sinus cardinal est défini par :

$$\text{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} \quad (1.17)$$

Avec $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

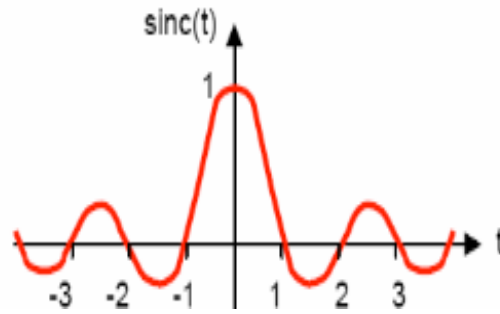


Figure 1.44 : Sinus cardinal

Cette fonction joue un rôle très important en traitement du signal.

CHAPITRE 2

Analyse de Fourier

2.1. INTRODUCTION

Le mathématicien et physicien français Joseph Fourier (1768–1830) a introduit les outils d'analyse qui portent son nom, dans un célèbre mémoire consacré à la Théorie analytique de la chaleur (1822), aujourd'hui consultable en ligne. C'est donc dans le but de résoudre une 'équation aux dérivées partielles d'évolution provenant de la physique que les séries de Fourier et la transformation de Fourier ont été inventées. D'abord outil formel — on trouvera dans le mémoire de Fourier fort peu de justifications mathématiquement rigoureuses de la décomposition en séries de Fourier. L'analyse de Fourier a inspiré de nombreux travaux mathématiques au XIX^{ème} et au XX^{ème} siècle, jusqu'à trouver son cadre moderne, là encore particulièrement bien adapté aux 'équations aux dérivées partielles, dans la théorie des distributions de Laurent Schwartz (1915–2002) à partir de 1945. La théorie de Fourier, qui s'est également révélée être un outil essentiel dans d'autres domaines des mathématiques — théorie des nombres, théorie des groupes, trouve donc naturellement sa place dans un cours consacré aux problèmes d'évolution. Dans ce chapitre, nous allons tout d'abord rappeler les notions d'analyse de Fourier qui nous seront utiles dans la suite. Un premier paragraphe sera ainsi consacré aux séries de Fourier des distributions périodiques, à une, puis plusieurs variables, et sera suivi d'un paragraphe de présentation concise de la transformation de Fourier des distributions tempérées, qui est la contribution principale de L. Schwartz à cette théorie.

Le lecteur est supposé avoir suivi, préalablement à ce cours, un cours d'introduction à la théorie des distributions, que nous utiliserons librement.

Puis nous consacrerons deux autres paragraphes à des exemples d'équations d'évolution à coefficients constants pour lesquelles l'usage de l'analyse de Fourier est déterminant : l'équation de la chaleur et l'équation des ondes. Enfin, un dernier paragraphe sera l'occasion d'introduire au concept général d'équation dispersive, et de discuter en détail l'équation de Schrodinger sans interaction.

La transformé de Fourier est un des outils mathématique les plus utilisés dans l'analyse et la conception des systèmes LTI (Linear Time Invariant).

Une autre approche c'est la série de Fourier. Ces techniques de représentations des signaux en fait, est une décomposition des signaux en une succession de composantes sinusoïdales (exponentiels complexes).

Avec une telle décomposition un signal est dit être représenté dans le domaine fréquentiel.

La plupart des signaux d'intérêt pratique peuvent être décomposés en une somme de composantes sinusoïdales.

- Pour la classe des signaux périodiques, une telle décomposition est appelée série de Fourier.
- Pour la classe des signaux à énergies finies la décomposition est appelée transformée de Fourier.

2.2. ANALYSE FREQUENTIELLE (SPECTRALE) DES SIGNAUX A TEMPS CONTINU

Par analogie par exemple à la décomposition de la lumière blanche (par exemple un rayon de soleil) à travers un prisme en différentes couleurs (différentes raies : celles d'un arc en ciel) ainsi :



La série de Fourier permet de représenter toutes les fréquences contenues dans un signal périodique dont la fonction $x(t)$ est connue mathématiquement.

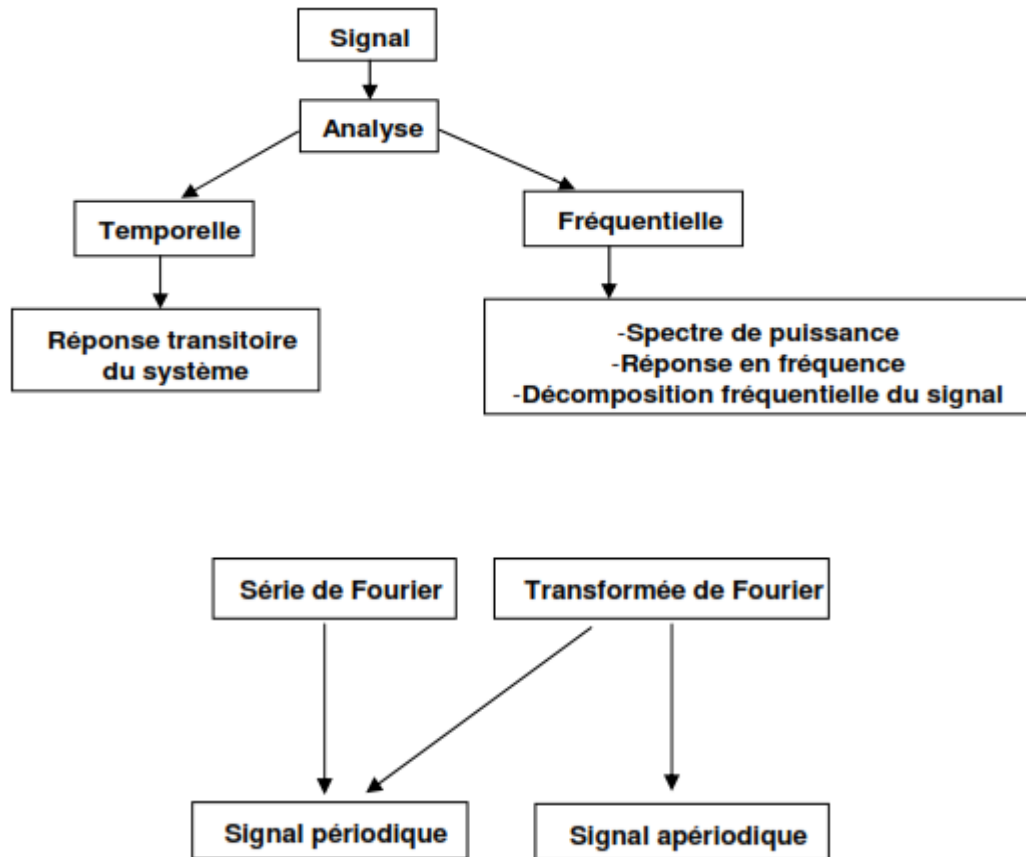
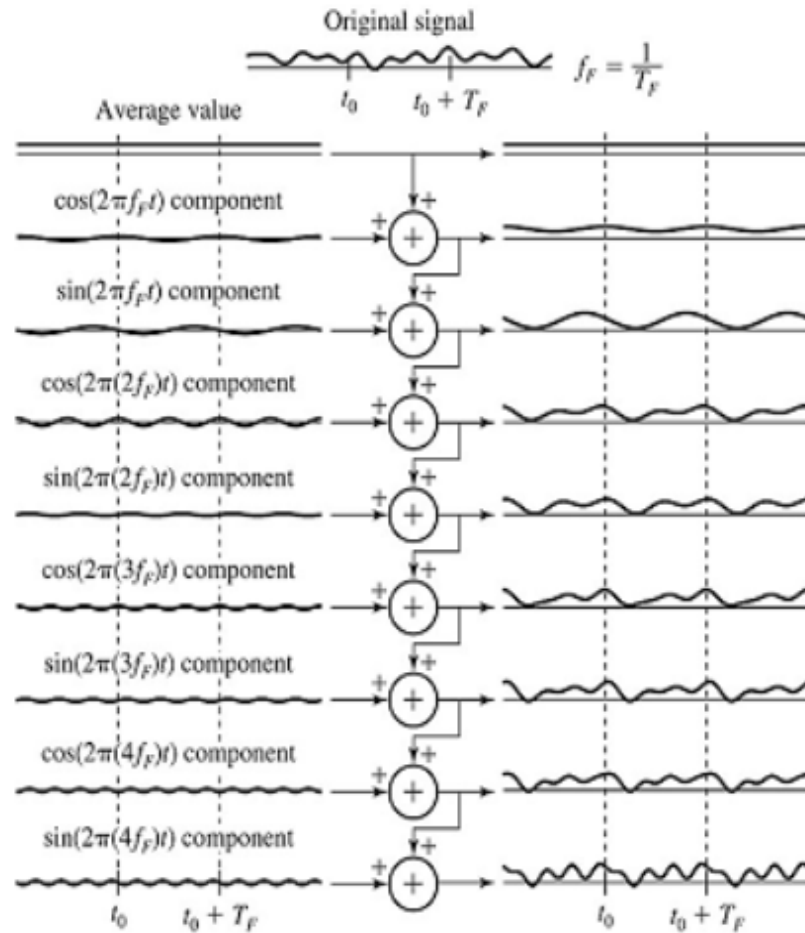


Figure 2.1 : Analyse fréquentielle

Tout signal périodique est la somme de signaux harmoniques d'amplitudes distinctes et d'une composante continue si elle existe.



$$x(t) = A_1 e^{j2\pi f_1 t} + A_2 e^{j2\pi f_2 t} + A_3 e^{j2\pi f_3 t} \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

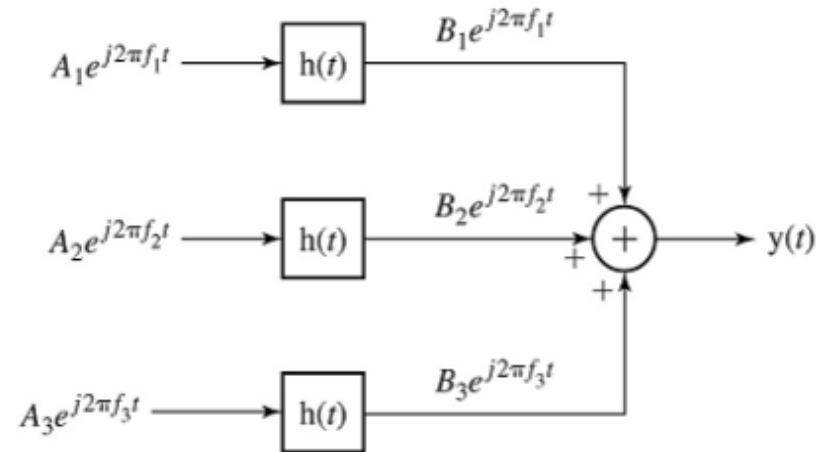


Figure 2.2. : Représentation harmonique d'un signal périodique

Pour caractériser un signal, la série de Fourier nous fournit des paramètres qui ne sont pas visibles dans le domaine temporel.

Exemple de reconstruction de signal :

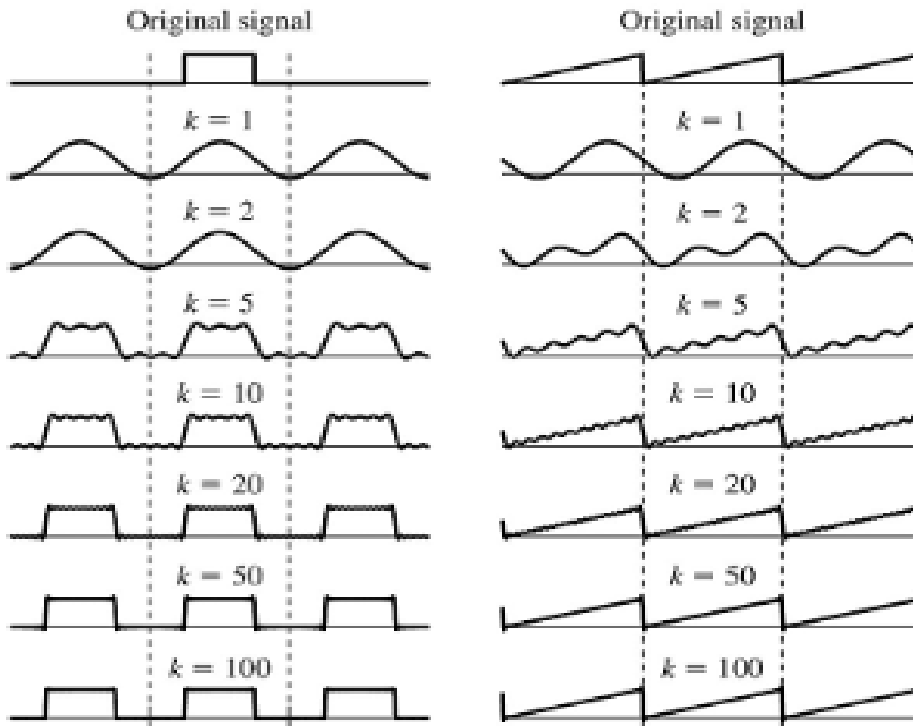


Figure2.3 : Reconstitution du signal original à partir d'une somme de signaux sinusoïdaux

- + Plus nous avons de signaux et meilleure sera la recomposition du signal original.
- le signal reconstitué contiendra des discontinuités proportionnelles au nombre de signaux
 → combinés phénomène de Gibbs

Analyse De Fourier

Analyse harmonique (ou fréquentielle) = instrument majeur de la théorie des signaux et des systèmes

Le développement en séries de Fourier (puis la transformation de Fourier) permet d'obtenir une représentation spectrale des signaux déterministes, c'est-à-dire. la répartition de

1. l'amplitude
2. la phase

3. l'énergie

4. la puissance des signaux considérés en fonction de la fréquence.

L'élément fondamental de l'analyse de Fourier est constitué par le fait qu'un signal périodique peut être décomposé en une somme d'ondes sinusoïdales.

2.3. LA SERIE DE FOURIER ET LES SIGNAUX PERIODIQUES A TEMPS CONTINU

Des exemples de signaux périodiques rencontrés en pratique : carré, rectangulaire, triangulaire, et bien sur le sinusoïdal ou exponentiel complexe. De tels signaux sont analysés par la série de Fourier.

2.3.1. Définition de la série de Fourier complexe

Série de Fourier est une approximation d'une fonction périodique par décomposition en **harmonique (cos et sin)** dans le but est :

- Calcul des coefficients de Fourier
- Donner la série de Fourier
- Théorème de Dirichlet
- Egalité de Parseval

On sait qu'une combinaison linéaire d'exponentiels complexes à l'aide des relations d'Euler liées de manière harmonique de **la forme complexe** :

Relations d'Euler :

$$\cos(x) = \frac{e^{+j.x} + e^{-j.x}}{2} \quad (2.1)$$

$$\sin(x) = \frac{e^{+j.x} - e^{-j.x}}{2j} \quad (2.2)$$

On montre aisément que la série de Fourier peut être transformée en une série de **Fourier complexe** à partir de la série de **Fourier de la représentation sinusoïdal** :

$$X(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{j2\pi k F_0 t} \quad (2.3)$$

Est un signal périodique de période fondamentale $T_p = \frac{1}{F_0}$.

Ainsi on peut penser que les signaux exponentiels :

$[e^{j2\pi k F_0 t}$ avec $k = 0, +1, -1, +2, -2, \dots$] sont les blocs de base pour la construction des signaux périodiques moyennant un choix approprié de la fréquence fondamentale F_0 et des coefficients $[c_k]$.

F_0 détermine la fréquence fondamentale de $X(t)$ et les coefficients $[c_k]$ spécifient la morphologie du signal.

Ainsi on suppose qu'on a un signal périodique $X(t)$ avec la période T_p . On peut représenter ce signal par la série appelée série de Fourier.

$$X(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{j2\pi k F_0 t} \quad (2.4)$$

On l'appelle **équation de synthèse**

L'expression des coefficients $[c_k]$ est ainsi donnée par :

$$c_k = \left[\frac{1}{T_p} \right] \int_{t_0}^{t_0+T_p} X(t) e^{-j2\pi F_0 t} dt \quad (2.5)$$

si $k=0$ On l'appelle **équation d'analyse**

2.3.1.1. Les conditions de Dirichlet sont :

Un point important qui apparaît dans la représentation des signaux périodiques $X(t)$ par la série de Fourier est la question **est-ce que cette série converge vers $X(t)$ pour n'importe quelle valeur de t ?**

En fait les conditions appelées **conditions de Dirichlet** assurent cette égalité à l'expression des valeurs de t pour lesquelles $X(t)$ est discontinu. A ces valeurs de t la série de Fourier converge à une valeur moyenne de la discontinuité.

1. Le signal $X(t)$ à un nombre fini de discontinuités dans n'importe quelle période.
2. Le signal $X(t)$ contient un nombre fini de maxima et de minima durant une période

3. Le signal $X(t)$ est absolument intégrable dans n'importe quelle période c'est-à-dire $\int_{T_p} |X(t)| dt < \infty$ (2.6)

En fait tous les signaux périodiques d'intérêt pratique remplissent ces conditions.

2.3.1.2. Définition du spectre d'un signal

Le spectre d'un signal n'est rien d'autre que la représentation en fréquence des sinusoïdes qui le compose.

Une sinusoïde $X(t) = A \sin(\omega t + \theta)$

A : Amplitude.

$\omega = 2\pi f$: Pulsation

θ : La phase.

La représentation de l'amplitude en fonction de f c'est le spectre d'amplitude.

La représentation de la phase en fonction de f c'est le spectre de phase.

- Spectres de fréquences

Spectre occupation en fréquence de $x(t)$ densité spectrale de puissance

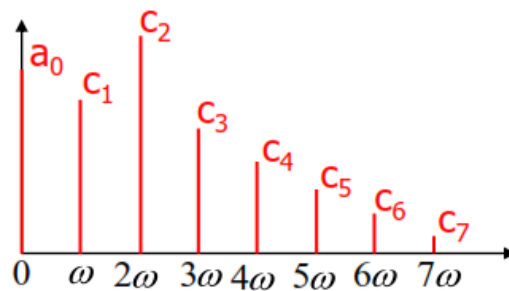


Figure 2.4 : Spectre d'amplitude

En ordonnée : l'amplitude des harmoniques

En abscisse : les pulsations correspondantes

- Spectres de phase

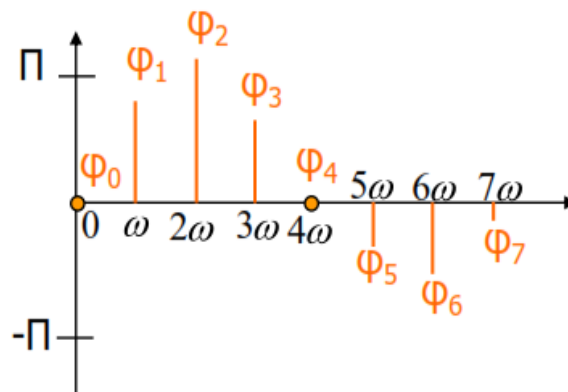


Figure 2.5 : Spectre de phase

En ordonnée : la phase des harmoniques

En abscisse : les pulsations correspondantes

Exemples de décomposition



$x(t)$	Représentation fréquentielle	Spéctre d'amplitude
	$car(t) = \frac{4A}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)\omega t}{2n+1}$	$a_n = 0, \forall n$ $b_n = \frac{4A}{n\pi}, n = 1, 3, 5, \dots$ $b_n = 0, n = 2, 4, 6, \dots$
	$tri(t) = -\frac{8B}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)\omega t}{(2n+1)^2}$	$a_n = -\frac{8B}{n\pi^2}, n = 1, 3, 5, \dots$ $a_n = 0, n = 0, 2, 4, 6, \dots$ $b_n = 0, \forall n$

On dit que le spectre est discret c'est le cas de tout les signaux periodiques.

2.3.1.3. Les harmoniques

On appelle les différentes sinusoïdes qui composent le signal harmonique. On le numérote en fonction de leurs fréquences. L'harmonique numéro n à une fréquence égale à n multiple celle de la fréquence de départ (fondamentale).

L'harmonique $n=1$ s'appelle le fondamentale.

2.3.2. Définition de la série de Fourier en cosinus

Aussi, il est facile de démontrer que si le signal périodique est réel alors c_k et c_{-k} sont complexes conjugués ainsi

Si $c_k = |c_k| e^{j\theta k}$ alors $c_{-k} = |c_k| e^{-j\theta k}$ en conséquence la série de Fourier peut aussi être représenté par :

$$X(t) = c_0 + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} |c_k| \cos(2\pi k F_0 t + \theta_k) \quad (2.7)$$

Ou c_0 est réel si $X(t)$ est réel.

On peut avoir aussi une autre forme de la série de Fourier en développement en **représentation sinusoïdal** avec :

$$\cos(2\pi k F_0 t + \theta_k) = \cos(2\pi k F_0 t) \cos \theta_k - \sin(2\pi k F_0 t) \sin \theta_k \quad (2.8)$$

Ainsi on peut écrire la série de Fourier sous la forme sinusoïdal par :

$$X(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(2\pi k F_0 t) + b_k \sin(2\pi k F_0 t) \quad (2.9)$$

Avec :

$$a_0 = c_0$$

$$a_k = 2|c_k| \cos \theta_k$$

$$b_k = 2|c_k| \sin \theta_k$$

La représentation en fonction de ω :

$$\text{Avec } \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi F$$

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} x(t) dt \\ a_k = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} x(t) \cos(k\omega t) dt \\ b_k = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} x(t) \sin(k\omega t) dt \end{cases} \quad (2.10)$$

Le développement en série de Fourier de $x(t)$ est donné par :

$$X(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t) \quad (2.11)$$

a_0 : valeur moyenne

$a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)$: Harmonique de rang n .

2.3.3. Densitéspectrale de puissance

Un signal périodique possède une énergie infinie et une puissance moyenne finie. Sa puissance moyenne sur une période est définie par

$$P_x = \frac{1}{T_p} \int_{T_p} |x(t)|^2 dt \quad (2.12)$$

Si on développe cette équation, nous avons

Si on prend le complexe conjugué $x^*(t)$ de la série de Fourier de $X(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{j2\pi k F_0 t}$

$$P_x = \frac{1}{T} \int_T x(t) x^*(t) dt = \frac{1}{T} \int_T x(t) \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k^* e^{-jk\omega_0 t} \right) dt$$

$$P_x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k^* \int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k^* C_k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |C_k|^2$$

$$P_x = \frac{1}{T_p} \int_{T_p} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |C_k|^2 \quad (2.13)$$

Cela signifie que la puissance d'un signal à temps continu périodique est égale à la somme des coefficients de Fourier aux carrés. C'est ce que l'on nomme **le théorème de Parseval**.

Cela signifie que si nous avons un signal quelconque que nous pouvons décomposer en série de Fourier, nous pouvons connaître la puissance de ce signal uniquement à l'aide des coefficients spectraux.

Pour illustrer le sens physique de la **relation de Parseval**, supposé que $X(t)$ consiste en une exponentiel complexe $X(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{j2\pi k F_0 t}$.

Dans ce cas tous les coefficients de la série de Fourier à l'exception de c_k sont nuls. Par conséquent la puissance moyenne dans le signal est donnée par :

$$P_X = |c_k|^2 \quad (2.14)$$

Remarque

C'est évident que $|c_k|^2$ représente la puissance dans le k^{ieme} composant harmonique du signal.

Ainsi la puissance moyenne totale dans le signal périodique est simplement la somme des puissances moyenne dans toutes les harmoniques.

Si on trace le $P_X = |c_k|^2$ en fonction des fréquences $kF_0; k = 0; +/-1; +/-2; \dots \dots \dots$

Le tracé qu'on obtient montre comment la puissance d'un signal périodique est distribuée à travers les différentes composantes fréquentielles.

Ce diagramme illustré ci-dessous est appelé densité spectrale de puissance du signal périodique $X(t)$.

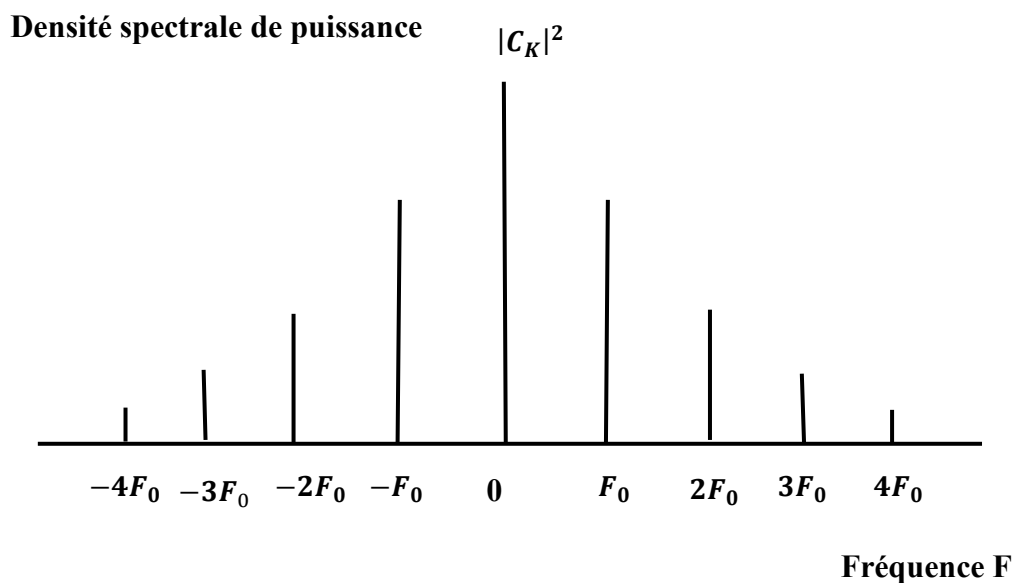


Figure 2.6. : Densité spectrale de puissance

Le spectre est discontinu compte tenu que la puissance existe seulement à des valeurs discrètes de la fréquence ($kF_0; k = 0; +/-1; +/-2; \dots \dots \dots$).

L'espace en deux lignes spectrales consécutives est $\left[1/T_p\right]$ et la morphologie du spectre dépend des caractéristiques temporelles du signal.

Comme cela était déjà expliqué les coefficients $[c_k]$ de la série de Fourier sont complexes ; ils peuvent être représentés par $C_k = |C_k| e^{j\theta_k}$ ainsi au lieu de tracer la densité spectrale de puissance on peut tracer le spectre d'amplitude $[|c_k|]$ et le spectre de la phase $[\theta_k]$ en fonction de la fréquence.

Il est clair que la densité spectrale de puissance du signal périodique est simplement le carré du spectre d'amplitude. L'information portée par la phase est complètement détruite (n'apparaît pas) dans la densité spectrale de puissance.

Si le signal périodique est réel les coefficients $[|c_k|]$ de la série de Fourier vérifient la condition :

$C_{-k} = c_k^*$ ainsi $|c_k|^2 = |c_{-k}^*|^2$ donc le spectre de puissance est une fonction symétrique de la fréquence.

Cette condition veut dire aussi que le spectre d'amplitude est symétrique (fonction paire) par rapport à l'origine et le spectre de la phase est une fonction impaire.

En conséquence, il est suffisant de spécifier le spectre d'un signal réel périodique seulement pour les fréquences positives aussi la puissance moyenne totale peut être exprimée par :

$$P_x = c_0^2 + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} |c_k|^2 = a_0^2 + [1/2] \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k^2 + b_k^2) \quad (2.15)$$

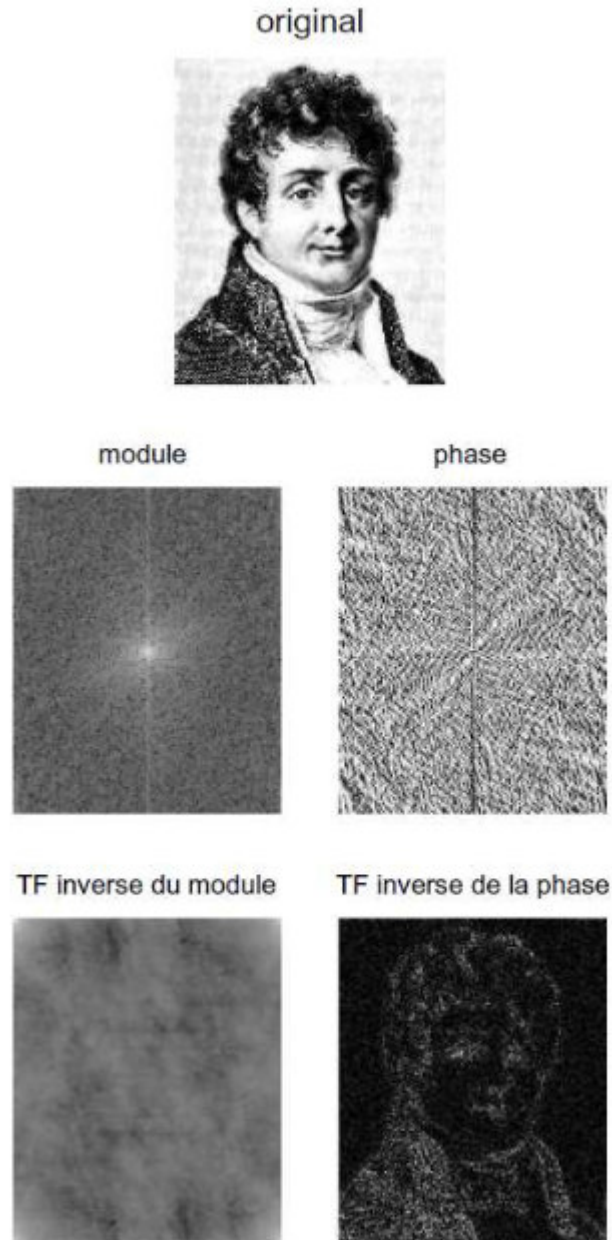


Figure 2.7. :série de Fourier importance de la phase

2.3.4. Propriété de série de Fourier

1. Si $X(t)$ est paire ($X(t) = X(-t)$) $\rightarrow b_k = 0 \quad \forall t$
2. Si $X(t)$ est impaire ($X(t) = -X(-t)$) $\rightarrow a_k = 0 \quad \forall t$
3. Si on ajoute une constante à $X(t)$, c'est la valeur moyenne qui change et non pas a_k et b_k .

4. Si on change l'origine des temps de $X(t)$, le spectre de phase est modifié et non le spectre d'amplitude.

$$5. c_k = \frac{a_k - jb_k}{2}, c_{-k} = \frac{a_k + jb_k}{2}$$

Exemple

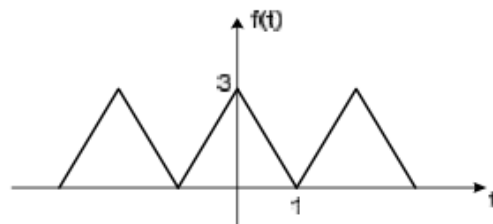


Figure 2.8 : fonction périodique triangulaire

Calculer a_0, a_n, b_n

La période est : $T = 2s$; la pulsation est : $\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi$; $f(t)$ est une fonction paire : $b_n = 0$.

La valeur moyenne est :

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-1}^1 f(t) dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^0 f(t) dt + \frac{1}{2} \int_0^1 f(t) dt$$

$$\forall t \in [-1, 0]$$

$$\text{et } \forall t \in [0, 1]$$

$$f(t) = at + b \Rightarrow f(t) = 3t + 3$$

$$f(t) = ct + d \Rightarrow f(t) = -3t + 3$$

D'où :

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^0 (3t + 3) dt = \frac{1}{2} \left[\frac{3}{2} t^2 + 3t \right]_{-1}^0 = \frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{2} \int_0^1 (-3t + 3) dt = \frac{1}{2} \left[-\frac{3}{2} t^2 + 3t \right]_0^1 = \frac{3}{4}$$

$$a_0 = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = \frac{3}{2}$$

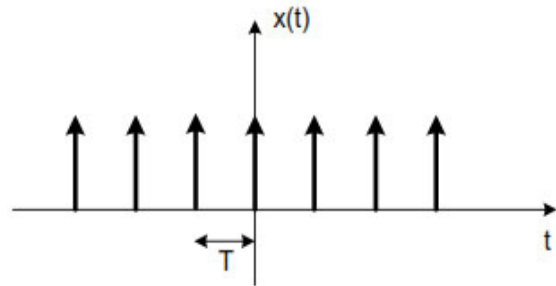
$$\boxed{a_0 = \frac{3}{2}}$$

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} f(t) \cdot \cos(2n\pi f_0 t) dt \Rightarrow a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/4}^{T/4} f(t) \cos(2n\pi t) dt$$

$$a_n = \int_{-1}^0 (3t+3) \cdot \cos(n\pi t) dt + \int_0^1 (-3t+3) \cdot \cos(n\pi t) dt$$

En intégrant par partie, on trouve

$$a_n = \frac{3}{(n\pi)^2} [1 - (-1)^n] + \frac{3}{(n\pi)^2} [1 - (-1)^n]$$



$$\text{D'où : } a_n = \frac{6}{(n\pi)^2} [1 - (-1)^n]$$

2.4. Les transformées de Fourier (Théorie et applications)

Pourquoi la transformée de Fourier

La transformée de Fourier est une généralisation des séries de Fourier pour tous types de signaux. Pour développer la transformée de Fourier, nous savons que l'idée principale est de tendre la période T d'un signal périodique vers l'infini. En insérant cette condition dans la série de Fourier, on obtient la relation suivante concernant la transformée de Fourier d'un signal apériodique ; quand T tend vers l'infini, la définition de la série de Fourier tend vers la transformée de Fourier ci-dessous ($i^2 = -1$) :

$$X(t) \xrightarrow{TF} X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(t) e^{-2i\pi ft} dt \quad (2.16)$$

$X(f)$ est une fonction de la variable continue. elle ne dépend pas de F_0 ou de T_p .

$$X(f) \xrightarrow{TF^{-1}} X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{2i\pi ft} df \quad (2.17)$$

Finalement la transformée de Fourier peut être aussi exprimée par la pulsation (ω)

Avec la pulsation : $X(f) = X(\omega)$

$$X(t) \xrightarrow{TF} X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(t)e^{-i\omega t} dt \quad (2.18)$$

$$X(\omega) \xrightarrow{TF^{-1}} X(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)e^{i\omega t} d\omega \quad (2.19)$$

Remarque

Il apparaît que la différence essentielle entre la série de Fourier et la transformée de Fourier c'est que le spectre du cas de transformée de Fourier est continu.

2.4.1. Les conditions de Dirichlet de la transformé de Fourier

L'ensemble des conditions (elles sont suffisantes mais non nécessaires) qui garantissent l'existence de la transformé de Fourier sont les conditions de Dirichlet qui sont exprimées par :

- 1- $X(t)$ à un nombre fini de discontinuités finies
- 2- $X(t)$ a un nombre fini de maxima et de minima
- 3- $X(t)$ est absolument intégrable c'est-à-dire

$$\int_{-\infty}^{+\infty} X(t) dt < \infty \quad (2.20)$$

2.4.2. Densité spectrale d'énergie des signaux apériodiques

Soit $X(t)$ un signal à énergie finie avec $X(f)$ sa transformée de fourier. Son energie est exprimé par :

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(t)|^2 dt \quad (2.21)$$

Elle peut être exprimée en fonction de $X(f)$ comme suit :

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} X(t) X(t)^* dt = \int X(t) dt \left[\int X(f)^* e^{-j2\pi Ft} df \right]$$

$$= \int X(f)^* df \left[\int X(t) e^{-j2\pi Ft} dt \right]$$

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df \quad (2.22)$$

Cette égalité entre l'énergie exprimée dans le domaine temporel et l'énergie exprimée dans le domaine fréquentiel (conservation d'énergie) exprime la relation de Parseval pour les signaux apériodiques d'énergie finie.

Le spectre $X(f)$ d'un signal est en général complexe. En conséquence, il est souvent exprimé en forme polaire

$$X(f) = |X(f)| e^{j\theta f} \quad (2.23)$$

Ou :

$|X(f)|$ représente le spectre d'amplitude et $\theta(f)$ représente le spectre de la phase.

D'un autre coté la quantité $|X(f)|^2 = S_{xx}(f)$ représente la distribution de l'énergie dans le signal en fonction de la fréquence.

Ainsi $S_{xx}(f)$ est appelée la densité spectrale d'énergie du signal $X(t)$.

L'intégrale de $S_{xx}(f)$ sur toutes les fréquences produit l'énergie totale du signal.

On remarque aussi que $S_{xx}(f)$ ne contient aucune information de phase ($S_{xx}(f)$ est entièrement réelle et non négative). Ainsi puisque le spectre de phase de $X(t)$ n'est pas contenu dans $S_{xx}(f)$

alors il est impossible de reconstruire le signal sachant $S_{xx}(f)$.

On peut facilement démontrer comme pour le cas des séries de Fourier que si le signal $X(t)$ est réel alors :

$$|X(-f)| = |X(f)| \text{ et } \arg X(-f) = -\arg X(f) \quad (2.24)$$

En combinant ces deux équations on obtient

$S_{xx}(-f) = S_{xx}(f)$ c'est-à-dire la densité spectrale d'énergie d'un signal réel a une symétrie paire.

2.4.3. Quelques propriétés de TF

1. TF est linéaire :

$$TF[as(t) + bf(t)] = aTF[s(t)] + bTF[f(t)]$$

2. TF [produit de convolution] = produit :

$$s(t) = (h * e)(t) \xrightarrow{TF} S(f) = H(f) \times E(f)$$

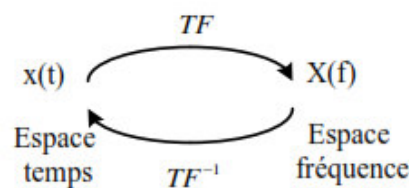
$$s(t) = (h * e)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t - \tau)e(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e(t - \tau)d\tau$$

3. Dualité de TF et TF^{-1} (on permute t et f , et on fait apparaître $-f$)

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{2i\pi ft} df \Rightarrow x(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(t)e^{2i\pi tf} dt$$

$$x(-f) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(t)e^{-2i\pi ft} dt = TF[X(t)]$$

La symétrie des transformations directe et inverse montre l'existence d'une dualité entre l'espace-temps et l'espace fréquence. Cette dualité joue un rôle fondamental dans la plupart des méthodes de traitement du signal.



2.4.4. Quelques transformées de Fourier

• La transformée de l'impulsion de Dirac est la fonction unité.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)e^{-2i\pi ft} dt = e^0 \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$$

• La transformée d'un peigne de Dirac est un peigne de Dirac

$$\text{Peigne}_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) \xrightarrow{TF} \frac{1}{T} \text{Peigne}_{\frac{1}{T}}(f) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - \frac{n}{T})$$

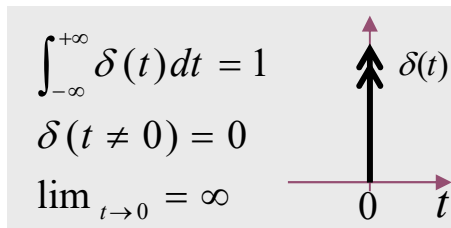


Figure 2.7 : Impulsion de Dirac

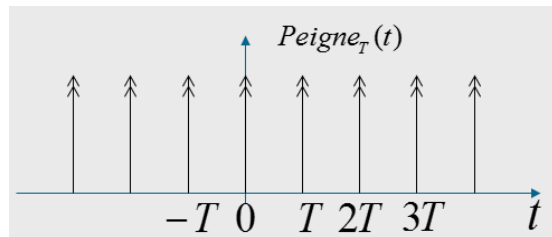


Figure 2.8 : Peigne de Dirac

- Transformée du cosinus est constituée de deux raies

$$s(t) = \cos(2\pi f_0 t) = \frac{e^{2i\pi f_0 t} + e^{-2i\pi f_0 t}}{2} \xrightarrow{TF} S(f) = \frac{(\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0))}{2}$$



Figure 2.9 : Transformée du cosinus

- La transformée d'un rectangle est un sinus cardinal

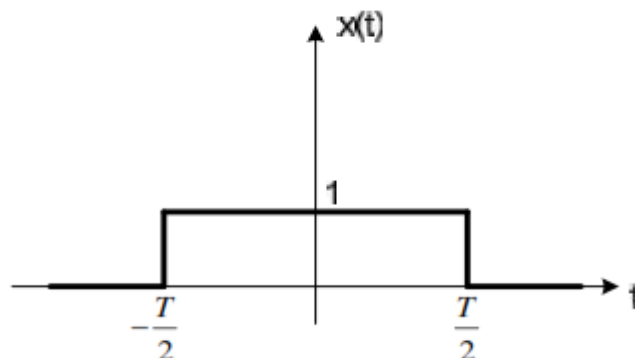


Figure 2.10 : Fonction rectangle

1. calculer la transformée de Fourier de $x(t) = \text{rect}_T(t)$
2. Représenter le spectre de $x(t)$.

$$X(f) = TF\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{rect}_T(t) \cdot e^{-j2\pi ft} \cdot dt$$

$$= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 1 \cdot e^{-j2\pi ft} \cdot dt = -\frac{1}{j2\pi f} [e^{-j\pi fT} - e^{j\pi fT}]$$

Or :

$$\sin \alpha = \frac{1}{2j} [e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}] \text{ et } \text{sinc} \alpha = \frac{\sin(\pi \alpha)}{\pi \alpha}$$

D'où :

$$X(f) = \frac{1}{\pi f} \cdot \sin(\pi fT) = T \cdot \frac{1}{\pi fT} \cdot \sin(\pi fT) = T \cdot \text{sinc}(fT)$$

D'où $X(f) = T \text{sinc}(fT)$

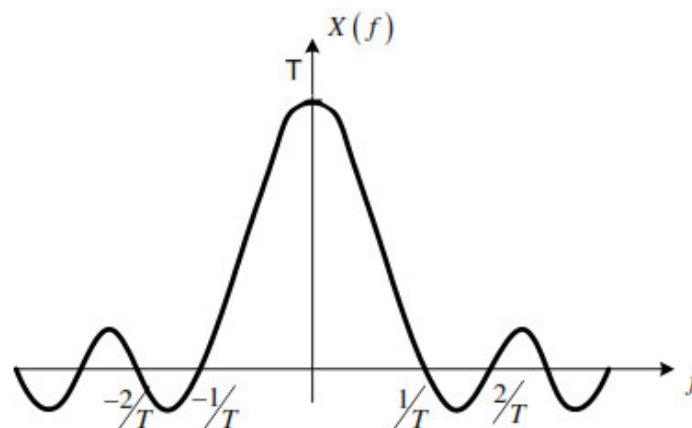


Figure 2.11 : Fonction Sinus cardinal : Spectre d'amplitude d'une impulsion rectangulaire

Pratiquement tous les signaux physiquement réalisables, ont une TF. Pour les signaux qui ne possèdent pas la TF, une transformation de même type a été développée c'est la transformée de Laplace.

CHAPITRE 3

TRANSFORMEE DE LAPLACE

3.1. INTRODUCTION

Ce chapitre a pour but d'introduire les notions de base sur la transformée de Laplace en introduisant aussi des notions (définitions et caractérisations) sur les systèmes linéaires continus en domaine temporelles et fréquentielles, et en particulier les **Systemes Asservis**

La transformation de Laplace fournit un outil puissant pour la résolution des équations différentielles linéaires vérifiant des conditions initiales données. De même, la fonction de transfert d'un système « entrée – sortie » est définie comme le rapport des transformées de Laplace des signaux d'entrée et de sortie.



Pierre Simon de Laplace (1749 – 1827).

3.2. Systemes Linéaires Continus

3.2.1. Notion de système

Un système est vu comme étant une boîte noire regroupant plusieurs éléments qui interagissent entre eux pour réaliser une ou plusieurs tâches sans intervention humaine malgré les changements dans l'environnement externe. Un système est caractérisé par des **entrées** sur

lesquelles on peut agir (elles sont dites des **consignes**) et des **sorties** permettant d'observer les réactions induites (dites aussi **réponses**) et soumis aux lois de la physique.

En plus des consignes, un système peut subir des entrées non désirées qui influent sur son comportement dites **perturbations**.

Un système peut être schématisé par la figure 3.1.

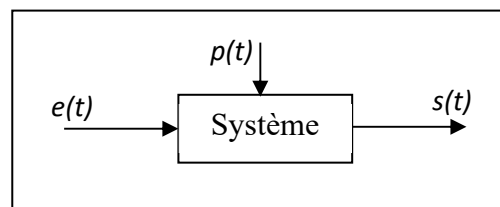


Figure 3.1 : représentation générale d'un système

Un système peut avoir plusieurs entrées et/ou plusieurs sorties, et dans ce cas on parle d'un système multi-variables, comme il ne peut avoir qu'une seule entrée et une seule sortie, et dans ce cas le système est dit mono-variable.

3.2.2. Principe de causalité

Les signaux temporels possèdent une propriété essentielle sur laquelle nous aurons l'occasion de revenir à maintes reprises : en effet ne pouvant survenir qu'après la cause qui lui a donné naissance, la réponse temporelle d'un système ne peut en aucun cas précéder la sollicitation qui en est la cause. Il s'agit du principe de causalité qui n'est pas qu'une vérité de Lapalisse comme nous aurons l'occasion de nous en rendre compte.

La réponse du système ne peut pas se produire avant l'excitation qui l'engendre
Conséquence :

$$\text{si } x(t) = 0 \text{ pour } t < 0 \text{ alors } y(t) = s[x(t)] = 0 \text{ pour } t < 0 \quad (3.1)$$

Nous nous intéresserons, dans le cadre du programme, aux systèmes linéaires, continus invariants.

3.2.3. Système continu

Un système est continu si les fonctions d'entrée et de sortie sont définies pour tout instant t . Les signaux sont dits analogiques

3.2.4. Systèmes linéaires

Un modèle est dit linéaire s'il satisfait au théorème de superposition, c'est-à-dire si l'effet de la somme de des grandeurs d'entrées e_i est égale à la somme de leurs effets y_i .

Si y_i est la réponse à l'entrée e_i et y la réponse à l'entrée e telle que :

$$e = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \quad (3.2)$$

Le principe de superposition est vérifié ssi :

$$y = \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i \quad (3.3)$$

La relation de comportement d'un système linéaire peut se mettre sous la forme d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants.

$$\text{Si } x(t) = a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) \quad \text{alors } y(t) = a_1 S[x_1(t)] + a_2 S[x_2(t)] \quad (3.4)$$

3.2.5. Système invariant

Les caractéristiques de comportement d'un système invariant sont indépendantes du temps.

Si une même entrée se produit à deux instants distincts (t_1 et t_2), alors les deux sorties temporelles ($s_1(t)$ et $s_2(t)$) seront identiques.

Un décalage temporel en entrée induit le même décalage en sortie. La réponse du système est invariante par translation dans le temps. Le système est dit alors invariant.

$$\text{Si } y(t) = S[x(t)] \quad \text{alors } y(t - t_0) = S[x(t - t_0)] \quad (3.5)$$

3.2.6. La stabilité

Un système est dit stable si en réponse à une entrée bornée, sa sortie est bornée

$$\exists M_x / |x(t)| < M_x \rightarrow \exists M_y / |y(t) = S[x(t)]| < M_y \quad (3.6)$$

Système qui, perturbé, revient à son état initial après disparition de la perturbation



Figure 3-2 la stabilité

3.3. RELATION ENTREE/SORTIE

La plus courante : équation différentielle linéaire à coefficients constants

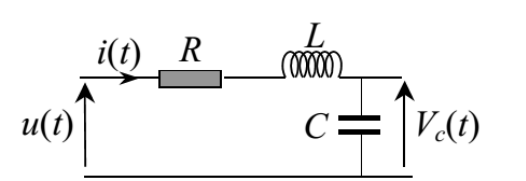
$$a_n y^{(n)}(t) + \dots + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) = b_m x^{(m)}(t) + \dots + b_1 x^{(1)}(t) + b_0 x(t) \quad (3.7)$$

Avec $y^{(i)} = \frac{d^i y(t)}{dt^i}$ (dérivée d'ordre i)

-Caractérisation complète du système par la connaissance des coefficients

-Sortie $y(t)$ calculable par la connaissance de $x(t)$

Exemple



Entrée du système : $x(t) = u(t)$

Sortie du système : $y(t) = V_c(t)$

◆ Lois de l'électricité

$$Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + V_c(t) = u(t)$$

et $i(t) = C\dot{V}_c(t)$

On en déduit :

$$LC\ddot{V}_c(t) + RC\dot{V}_c(t) + V_c(t) = u(t)$$

3.4. PRODUIT DE CONVOLUTION

Le produit de convolution d'un signal $s(t)$ par un autre $h(t)$ est donné par :

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t - \tau)g(\tau)d\tau \quad (3.8)$$

Nous reconnaissons les deux transformés de Laplace :

$$L[f(t) * g(t)] = F(p) G(p) = L[f(t)] L[g(t)] \quad (3.9)$$

La transformée de Laplace du produit de convolution de deux fonctions causales est égal au produit des transformées de Laplace des deux fonctions.

3.5. REPONSES TEMPORELLES

On appelle réponse temporelle d'un système l'évolution de sa sortie $s(t)$ en fonction du temps, suite à l'application d'une entrée en partant de l'état de repos.

La réponse de chaque système se compose de deux parties :

- Une phase transitoire (dite aussi réponse transitoire ou régime transitoire) : elle représente la réaction du système lorsqu'on lui applique un signal d'entrée alors qu'il était au repos (ou lorsqu'on modifie le signal d'entrée). Cette réponse décroît au cours du temps et à mesure.
- Une phase permanente (dite aussi réponse permanente, régime permanent ou encore régime établi) : c'est la phase qui vient directement après la phase transitoire, et demeure jusqu'au arrêt du système.

3.6. SYSTEMES LINEAIRES CONTINUES, DEFINITIONS ET CARACTERISATIONS Fréquentielles

3.6.1. Transformée de Laplace :

L'automatique repose en grande partie sur l'utilisation des mathématiques et fait appel à de nombreux outils mathématiques.----->la Transformée de Laplace.

La Transformée de Laplace permet la résolution, dans le domaine fréquentiel, d'un problème posé dans le domaine temporel. En d'autres termes, il simplifie la résolution d'équations différentielles linéaires à coefficients constants facilement (en particulier celles d'ordre élevé) décrivant le comportement des SCLI et sert pour l'étude de régime transitoire du système.

Avantage :

- l'étude de régime transitoire du système.



- Résoudre les équations différentielles par TL
- Déterminer la fonction de transfert du système.

Définition

La Transformée de Laplace d'une fonction $x(t)$, ($t \in \mathbb{R}$) est donnée par :

$$X(p) = \int_0^{+\infty} x(t). e^{-pt} dt \quad (3.10)$$

Où : p est la variable de Laplace, avec ($p = \sigma + j\omega$) et on note $X(p) = TL\{x(t)\}$

Remarque : on peut trouver d'autres notations.

3.7.PROPRIETES :

Soient $x(t)$ et $y(t)$ deux fonctions avec ($t \in \mathbb{R}$), et soient $X(p)$ et $Y(p)$, respectivement, leurs transformées de Laplace.

- **Linéarité :**

$$TL\{\alpha x(t) + \beta y(t)\} = \alpha X(p) + \beta Y(p)$$

- **Changement d'échelle temporelle (multiplication de t par un scalaire)**

$$TL\{x(\alpha t)\} = \frac{1}{|\alpha|} X\left(\frac{p}{\alpha}\right)$$

- **Translation temporelle**

Retard $TL\{x(t - \tau)\} = X(p)e^{-\tau p}$

Avance $TL\{x(t + \tau)\} = X(p)e^{+\tau p}$

- **Multiplication d'une fonction par une exponentielle**

$$TL\{e^{-\alpha t} x(t)\} = X(p + \alpha)$$

- **Dérivation par rapport à t**

$$TL\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = pX(p) - x(t=0)$$

$$TL\left\{\frac{d^n x(t)}{dt^n}\right\} = p^n X(p) - p^{n-1}x(0) - p^{n-2} \frac{dx(0)}{dt} - \dots - px^{(n-2)}(0) - x^{(n-1)}(0)$$

- Intégration par rapport à t

$$TL \left\{ \int_0^t x(u) du \right\} = \frac{X(p)}{p}$$

- Théorème de la valeur finale

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pX(p)$$

- Théorème de la valeur initiale

$$\lim_{t \rightarrow 0} x(t) = \lim_{p \rightarrow +\infty} pX(p) \text{ si la limite en } t=0 \text{ de } x(t) \text{ existe}$$

3.8. LA TRANSFORMEE DE LAPLACE INVERSE

La Transformée de Laplace Inverse consiste à retrouver le signal original temporel de $x(t)$ à partir de sa Transformée de Laplace $X(p)$.

Mathématiquement, elle est donnée par :

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{\sigma - jr}^{\sigma + jr} X(p) e^{pt} dp \quad (3.11)$$

Mais, pratiquement, on préfère retrouver $x(t)$ soit par décomposition en éléments simples ou par la méthode des résidus. Pour mieux comprendre, prenons un exemple auquel nous appliquons les deux méthodes pour retrouver la fonction $x(t)$ à partir de $X(p)$.

Remarque : Les cas où il faudra effectivement calculer une transformée de Laplace inverse à l'aide de cette expression sont extrêmement rares : nous verrons plus loin, qu'en général, il suffit de connaître une dizaine de transformées de Laplace usuelles et quelques propriétés fondamentales pour retrouver l'original d'une fonction $F(p)$.

Transformée inverse

La transformée de Laplace étant un opérateur bijectif, sa bijection inverse existe. Elle est unique et on l'appelle original de F ; on a alors $\mathcal{L}^{-1}(F(p)) = f(t)$. La définition mathématique de la transformée de Laplace inverse se base sur une intégrale de contour dans le plan complexe, l'utilisation de cette définition exige une connaissance de l'Analyse complexe.

En pratique :

- On détermine la transformée inverse de $F(p)$ directement de la table.
- Il faut d'abord exprimer ou décomposer $F(p)$ en une somme de termes dont les transformées inverses sont dans la table.
- Utiliser la table conjointement avec une ou plusieurs propriétés.
- S'il y a des retards, les traiter en premier, séparément.
- Pour des fractions rationnelles, on décompose dans l'ensemble des réels en éléments simples.
- Pour les éléments simples de première espèce se traitent facilement. Pour ceux de seconde espèce, on doit mettre leur dénominateur sous forme canonique, pour retrouver des originaux en sinus ou en cosinus.

3.9. Représentation par Fonction de transfert :

3.9.1. Définition d'un système linéaire :

Soit un système linéaire mono variable quelconque ayant une entrée $e(t)$ et une sortie $s(t)$.

L'équation différentielle qui régit un tel système est donnée dans le cas général par :

$$a_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{ds(t)}{dt} + a_0 s(t) = b_m \frac{d^m e(t)}{dt^m} + \dots + b_1 \frac{de(t)}{dt} + b_0 e(t) \quad (3.12)$$

Etant donné que les conditions initiales sont nulles. Appliquons la transformée de Laplace aux deux membres de cette équation, on obtient l'expression finale donnée par :

$$\frac{b_m p^m + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + \dots + a_1 p + a_0} = \frac{S(p)}{E(p)} \quad (3.13)$$

Cette fraction rationnelle de deux polynômes de la variable complexe p est appelée fonction de transfert.

Remarquons que $n < d$, condition nécessaire pour le bon respect du principe de causalité. Les transformations de Laplace permettent de travailler aisément avec ce type d'équation. Après transformation de Laplace, l'équation devient (sous réserve de conditions initiales nulles) :

3.9.2. Fonction De Transfert

du système et elle est souvent notée $T(p)$ ou $G(p)$.

La fonction de transfert d'un système monovariante, continu et linéaire est le rapport de la transformée de Laplace de la sortie du système sur la transformée de Laplace de son entrée pour des conditions initiales nulles.

$$G(p) = \frac{b_m(p-z_m)(p-z_{m-1})\dots(p-z_1)}{a_n(p-p_n)(p-p_{n-1})\dots(p-p_1)} \quad (3.14)$$

- Les racines z_i qui annulent le numérateur sont dits les zéros de la fonction de transfert.
- Les racines qui annulent le dénominateur sont dits les pôles de la fonction de transfert.

Exemple :

La fonction de transfert du système masse ressort donné précédemment est donnée par :

$$G(p) = \frac{X(p)}{F(p)} = \frac{1}{k + fp + Mp^2}$$

3.9.3. Qu'est-Ce Qu'une Réponse Fréquentielle ?

La réponse fréquentielle d'un système (dite aussi réponse harmonique) est la réponse de celui-ci à une entrée sinusoïdale.

Prenons dans le cas général, le signal sinusoïdal $e(t) = Ae^{j\omega t}$ d'amplitude A et de pulsation ω .

On injecte ce signal à l'entrée d'un système Linéaire Continu Invariant. On aura donc pour la sortie :

$$s(t) = h(t) * e(t) = \int_0^t h(\tau)e(t-\tau)d\tau \leftarrow \text{produit de convolution}$$

$$\Rightarrow s(t) = \int_0^t h(\tau)Ae^{j\omega(t-\tau)}d\tau$$

Où : $h(t)$ est la réponse impulsionnelle du système.

Donc :

$$s(t) = Ae^{j\omega t} \int_0^t h(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau = Ae^{j\omega t}H(j\omega)$$

Avec :

$$H(j\omega) = TL(h(t)) \text{ en remplaçant } p \text{ par } j\omega.$$

3.10. UTILISATION DE TL POUR UNE RESOLUTION D'UNE EQUATION différentielle :

La transformée de Laplace permet de convertir une équation différentielle en une équation Algébrique, dont la solution est la transformée de la solution de notre équation différentielle. Pour finir, on utilise la transformée de Laplace inverse pour déterminer la solution.

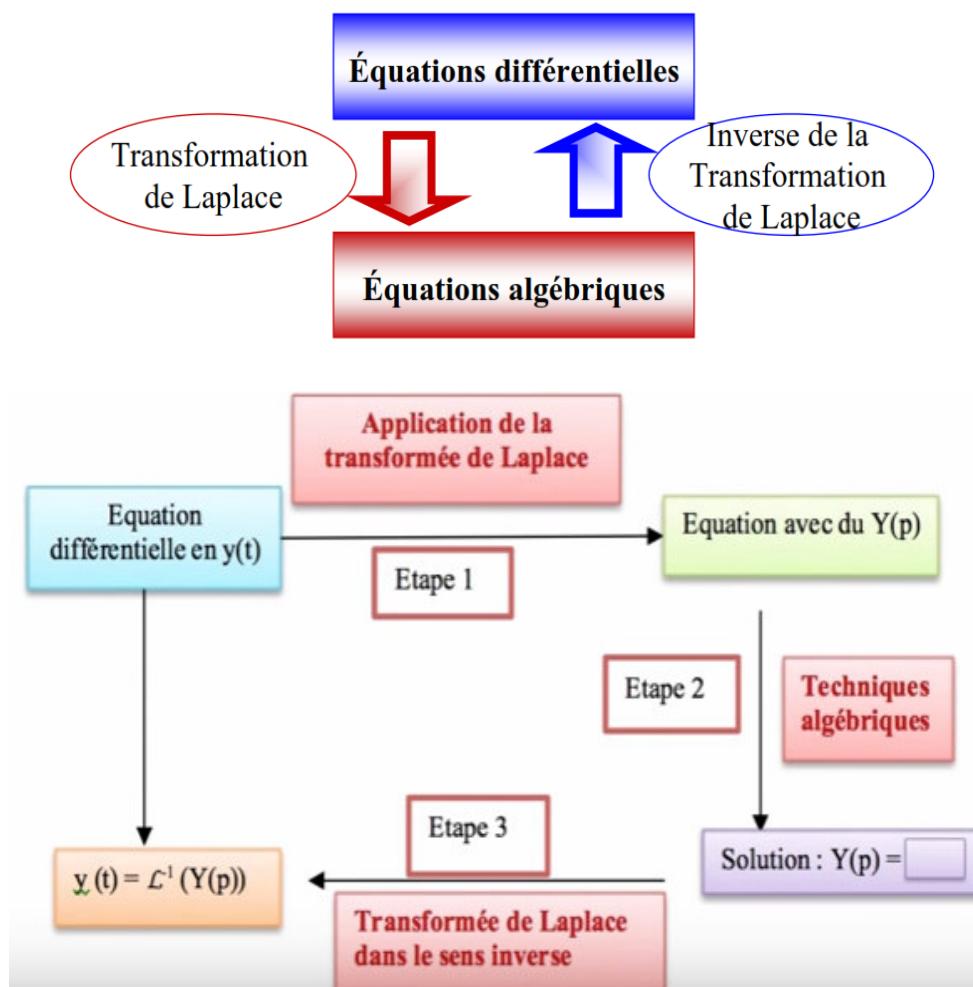


Figure 3.3 :résolution d'une équation différentielle par TL

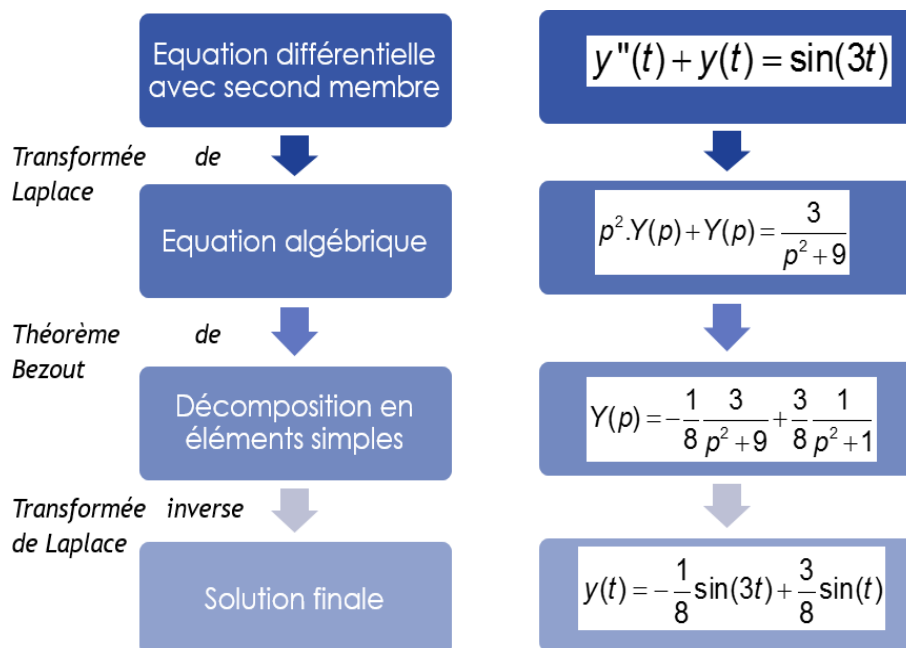
La recherche de la solution de l'équation différentielle se limite alors, à partir du polynôme, à la recherche dans une table de la forme type de la solution.

3.10.1. Équations différentielles

La résolution d'équations différentielles en utilisant la transformée de Laplace consiste en la réalisation des étapes suivante :

1. Transformer l'équation différentielle en équation algébrique par l'application de la transformée de Laplace.
2. Résoudre l'équation pour la variable dépendante dans le domaine de Laplace.
3. Réaliser la transformée inverse.

3.10.2. Exemple Méthode De Résolution





CHAPITRE 4

PRODUIT DE CONVOLUTION

4.1. INTRODUCTION

Le produit de convolution est un outil d'une grande importance en physique. On le rencontre, par exemple, à chaque fois que l'on étudie :

- _ La transmission d'un signal par un appareil,
- _ Une impulsion électrique fonction du temps,
- _ Une image représentée par une fonction d'une ou deux variables,
- _ En diffraction.

Avec la transformée de Fourier et en liaison avec elle, le produit de convolution est un outil essentiel pour l'étude des phénomènes physiques. En effet de très nombreux systèmes opèrent comme des filtres, au sens où un signal d'entrée est modifié après passage dans le système. Sous des hypothèses très générales de linéarité et d'invariance dans le temps, le signal de sortie s'exprime sous forme d'un produit de convolution entre le signal d'entrée et une fonction qui dépend du système étudié.

4.2. CONVOLUTION DE DEUX FONCTIONS

Définition

Soit f et g deux fonctions intégrables sur \mathcal{R} . On appelle produit de convolution de f par g la fonction notée $(f * g)$, définie par l'intégrale supposée convergente.

$$(f * g) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t - \tau)d\tau \quad (4.1)$$

Dans le cas particulier où les fonctions f et g sont nulles sur \mathcal{R}^- on obtient :

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau \quad (4.2)$$

En effet

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^0 f(\tau)g(t - \tau)d\tau + \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau + \int_t^{+\infty} f(\tau)g(t - \tau)d\tau \quad (4.3)$$

La première intégrale est nulle car $(f(\tau) = 0)$ pour $\tau < 0$, la troisième intégrale est également nulle car $g(t - \tau) = 0$ pour $\tau > 0$.

Remarque : Ce produit de convolution n'existe pas toujours. Ce produit est commutatif dès lors qu'il est défini.

Théorème. Le produit de convolution de deux fonctions localement sommables f et g existe dès lors que l'une des conditions suivantes est satisfaite :

1. Les fonctions f et g sont toutes les deux à support borné,
2. Les fonctions f et g sont toutes les deux à support borné à gauche,
3. Les fonctions f et g sont toutes les deux à support borné à droite.

4.3. . Interprétation graphique de la convolution

Le calcul de la convolution consiste donc à calculer la surface du produit $f(\tau)g(t - \tau)$.

Le signal $g(t - \tau)$ est simplement le signal initial $g(\tau)$,

Retourné dans le temps pour donner $g(\tau)$, puis translaté de t .

En calculant alors l'ensemble des surfaces obtenues en faisant « glisser » g , c'est-à-dire pour tous les décalages de t , on obtient le produit de convolution pour tout t .

Remarque : pour calculer un produit de convolution $(f * g)(t)$,

1. La variable t est remplacé par τ .
2. il faut conserver le premier signal.
3. trouver le symétrique du second par rapport à l'axe des ordonnées $g(\tau) \rightarrow g(-\tau)$.
4. décaler ce signal du temps t , $g(-\tau) \rightarrow g(t - \tau)$.
5. multiplier les deux signaux obtenus $f(\tau)g(t - \tau)$. et finalement intégrer le résultat.

4.4. PROPRIETES DU PRODUIT DE CONVOLUTION

Le produit de convolution est un produit bilinéaire et commutatif, généralement noté « * », c'est un opérateur qui fait correspondre aux deux fonctions f et g une autre fonction $f * g$ sur le même domaine de définition que f et g .

1. commutativité

le produit de convolution est commutatif

$$f(t) * g(t) = g(t) * f(t) \quad (4.5)$$

$$(f * g) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t - \tau)d\tau$$

2. associativité

$$y(t) = f(t) * g(t)$$

$$= g(t) * f(t)$$

$$f(t) * g(t) = f(t) * [g_1(t) * g_2(t)]$$

$$f(t) * g(t) = [f(t) * g_1(t)] * g_2(t) \quad (4.6)$$

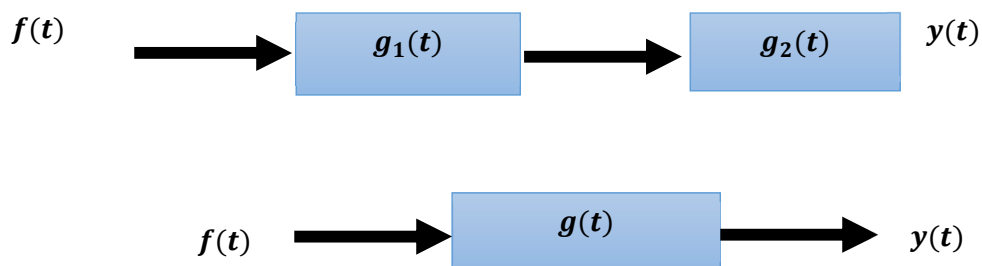


Figure 4.1 : associativité

3. Linéarité et distributivité

Cette propriété est la conséquence de la linéarité des intégrales.

$$y(t) = f(t) * g_1(t) + f(t) * g_2(t) \quad (4.7)$$

$$= f(t) * [g_1(t) + g_2(t)]$$

$$\text{avec } g_1(t) = ag(t) \text{ et } g_2(t) = bg(t)$$

Grace à cette propriété, on peut dire que la mise en parallèle de deux systèmes de réponse impulsionnelle $g_1(t)$ et $g_2(t)$ est équivalente à un système dont la réponse impulsionnelle $g(t)$ est la somme de deux réponses $g_1(t)$ et $g_2(t)$.

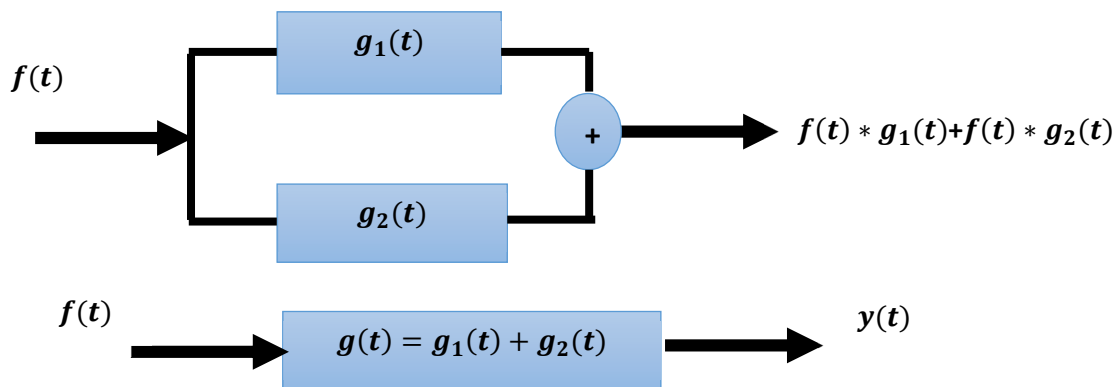


Figure 4.2 : distributivité

4. Élément neutre de la convolution

L'élément neutre du produit de convolution est la distribution de Dirac.

$$f(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = h(t) \quad (4.8)$$

La convolution par un pic de Dirac renvoie donc le signal dans son entier. Il en résulte que convoluer un signal par une distribution de Dirac décalée permet de translater le signal.

En effet :

$$f(t) * \delta(t - a) = h(t - a) \quad (4.9)$$

Qui est une fonction de t .

On peut ainsi noter la différence entre la convolution d'un signal par une distribution de Dirac qui conduit à un signal et l'application de la distribution qui conduit à un nombre.

4.5. EXPLICATION GRAPHIQUE DU PRODUIT DE CONVOLUTION

On peut expliquer le produit de convolution par deux simple exemples :

➤ **Le premier exemple :**

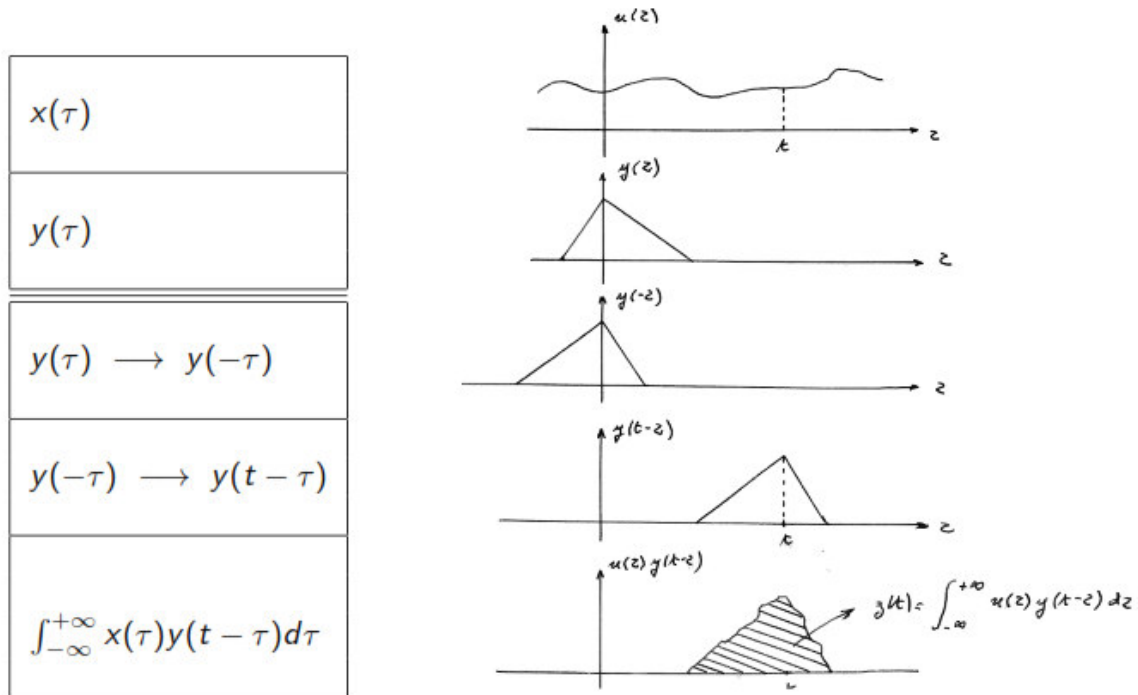


Figure 4.3 :exemple explicatif de convolution

➤ **Deuxième exemple :**

Soit les deux signaux identiques représentés sur la figure ci-dessous :

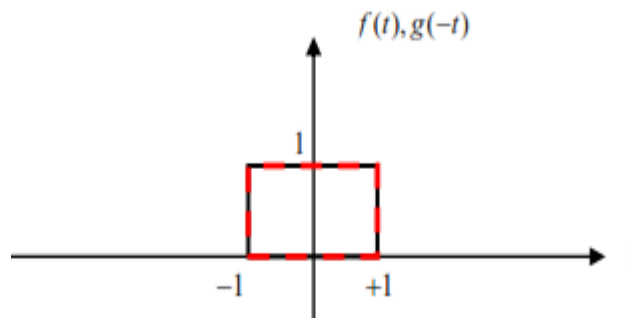


Figure 4.4. Présentations de deux signaux rectangulaires identiques et inversés dans le Temps

On fait glisser $g(-\tau)$ (le signal en rouge) de $-\infty \rightarrow +\infty$ et on effectue l'intégrale donnant le produit de convolution.

Pour $t = -2$

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(-2-\tau)d\tau = 0$$

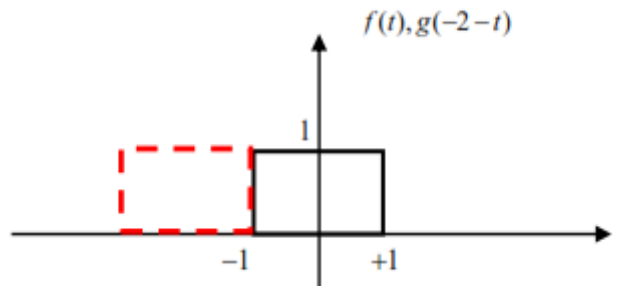


Figure 4.5. Deux signaux rectangulaires identiques décalés de (-2) unités de temps

Pour
 $t = -1.5$

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(-1.5-\tau)d\tau = 0.5$$

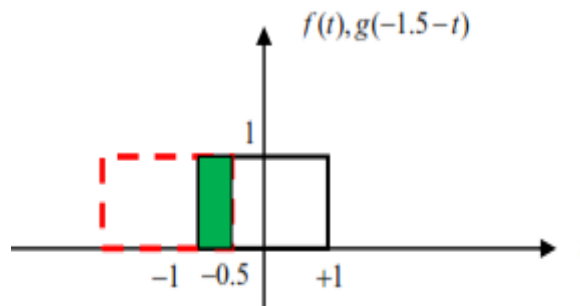


Figure 4.6. Deux signaux rectangulaires identiques décalés de (-1.5) unités de temps

Pour $t = -1$

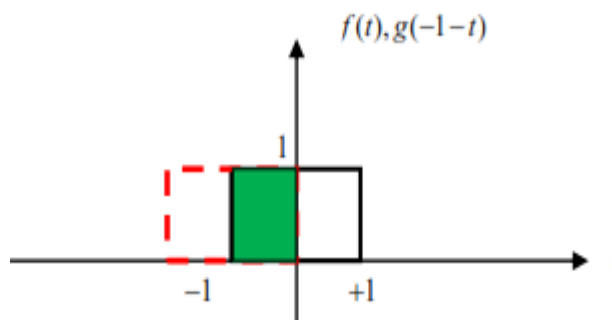


Figure 4.7. Deux signaux rectangulaires identiques décalés de (-1) unités de temps

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(-1-\tau)d\tau = 1$$

Pour $t=0$

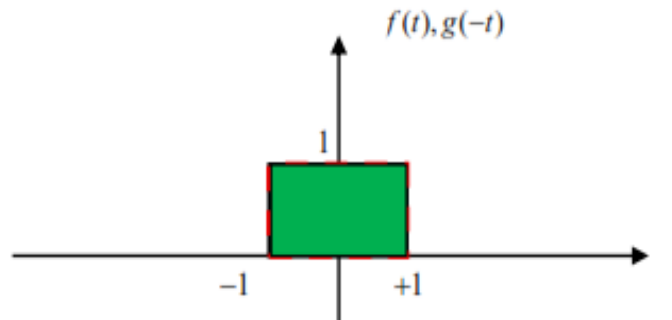


Figure 4.8. Deux signaux rectangulaires identiques non décalés

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(-\tau)d\tau = 2$$

On continue jusqu'à pour $t=2$

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(2-\tau)d\tau = 0$$

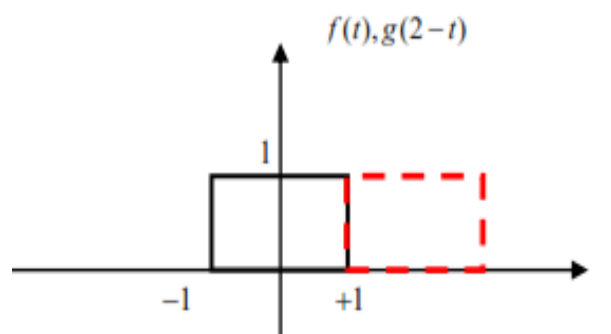


Figure 4.9. Deux signaux rectangulaires identiques décalés de (+2) unités de temps

Enfin, on peut donner la fonction « convolution » de ces deux signaux et qui est représentée par la figure suivante :

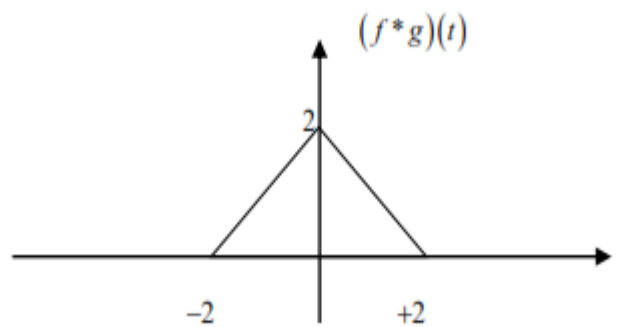


Figure 4.10. Fonction de convolution des deux signaux rectangulaires identiques

4.6. EXEMPLE DE CALCUL DU PRODUIT DE CONVOLUTION

Si on prend :

$$f(t) = \frac{1}{x^2+a^2}; g(t) = \frac{1}{x^2+b}$$

Alors :

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(t-\tau)^2+a^2} \cdot \frac{1}{\tau^2+b} d\tau$$

Remarque :

Le calcul de cette intégrale est assez compliqué, il est plus facile de passer aux transformées de Laplace et de Fourier où le produit de convolution basé sur une intégrale devient un simple produit arithmétique.

4.7. CONVOLUTION ET TRANSFORMEE DE FOURIER

La transformée de Fourier à la propriété remarquable d'échanger la convolution et la multiplication au sens ordinaire, des fonctions.

Calculons maintenant la transformée de Fourier du produit de convolution de deux fonctions :

$$y(t) = f(t) * g(t) \rightarrow TF[f(t) * g(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau \right] e^{-j\omega t} dt$$

$$TF[f(t) * g(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t - \tau)d\tau e^{-j\omega t}d\tau dt$$

Nous pouvons intervertir l'ordre des intégrations :

$$TF[f(t) * g(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} g(t - \tau)e^{-j\omega t} dt \right] d\tau$$

L'application du résultat précédent sur la translation temporelle nous donne :

$$TF[f(t) * g(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{-j\omega\tau} G(j\omega)d\tau$$

où $G(j\omega)$ représente la transformée de Fourier de $g(t)$. Donc :

$$TF[f(t) * g(t)] = G(j\omega) \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau = G(j\omega)F(j\omega)$$

Donc la transformée de Fourier du produit de convolution de deux fonctions est égale au produit de deux transformées :

$$TF[f(t) * g(t)] = TF[f(t)] \times TF[g(t)] \quad (4.10)$$

Théorème de Plancherel

La transformée de Fourier du produit de convolution de deux signaux $f(t)$ et $g(t)$ est égale au produit des transformées de Fourier de ces deux signaux.

$$TF^{-1}[TF(f(t))TF(g(t))] = f(t) * g(t) \quad (4.11)$$

4.8. CONVOLUTION ET TRANSFORMEE DE LAPLACE

Considérons deux fonctions causales $f(t)$ et $g(t)$, dont nous notons $F(p)$ et $G(p)$ les transformées de Laplace. Nous nous intéressons au produit de convolution de ces deux fonctions :

Remarquons tout d'abord que ce produit de convolution est lui-même une fonction causale.

La fonction à intégrer est en effet nulle en dehors de l'intervalle $0 < u < t$. Nous pouvons donc écrire :

$$f(t) * g(t) = \int_0^{+\infty} f(\tau)g(t - \tau)d\tau = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau$$

Calculons-la transformée de Laplace de ce produit de convolution :

$$L[f(t) * g(t)] = \int_0^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} f(\tau)g(t - \tau) d\tau \right] e^{-pt} dt$$

Nous pouvons écrire :

$$L[f(t) * g(t)] = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} f(\tau)g(t - \tau)e^{-pt} dt d\tau$$

Nous pouvons inverser l'ordre d'intégration :

$$L[f(t) * g(t)] = \int_0^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} g(t - \tau)e^{-pt} dt \right] f(\tau) d\tau$$

Effectuons un changement de variable en posant $v = t - \tau$:

$$L[f(t) * g(t)] = \int_0^{+\infty} \left[\int_{-\tau}^{+\infty} g(v)e^{-p(\tau+v)} dv \right] f(\tau) d\tau$$

La fonction g étant causale nous avons :

$$\int_{-\tau}^{+\infty} g(v)e^{-p(\tau+v)} dv = \int_0^{+\infty} g(v)e^{-p(\tau+v)} dv = e^{-p\tau} \int_0^{+\infty} g(v)e^{-pv} dv$$

Ce qui nous donne :

$$L[f(t) * g(t)] = \int_0^{+\infty} f(\tau)e^{-p\tau} d\tau \int_0^{+\infty} g(v)e^{-pv} dv$$

Nous reconnaissons les deux transformés de Laplace :

$$L[f(t) * g(t)] = F(p) G(p) = L[f(t)] L[g(t)] \tag{4.12}$$



La transformée de Laplace du produit de convolution de deux fonctions causales est égal au produit des transformées de Laplace des deux fonctions.

CHAPITRE 5

CORRELATION DES SIGNAUX

5.1. INTRODUCTION

En traitement de signaux, il est souvent nécessaire de comparer deux signaux, cela se fait de plusieurs manières.

La méthode qui la plus utilisée consiste à mesurer leur similitude de forme et de position en faisant translater l'un des signaux par rapport à l'autre mathématiquement. Cette opération est un produit scalaire.

Les fonctions de corrélation (autocorrélation et inter-corrélation) sont utilisées dans l'analyse spectrale des signaux à énergie finie ou à puissance moyenne finie. Physiquement la fonction de corrélation est obtenue en décalant l'un des signaux en multipliant le signal décalé par l'autre signal et puis en intégrant le produit obtenu.

La fonction d'inter-corrélation permet par ailleurs de mesurer le degré de ressemblance de deux signaux.

Qu'est-ce que la corrélation ?

Comparaison de deux signaux entre eux

Cette fonction agit principalement dans le domaine temporel

On s'intéresse à des signaux d'énergie finie (support temporel fini)

Ou aux signaux à puissance moyenne finie

5.2. CORRELATION DE SIGNAUX A ENERGIE FINIE

Soient $x(t)$ et $y(t)$ deux signaux d'énergie finie.

- **Fonction d'inter-corrélation (produit de corrélation de x par y)**

$$C_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t - \tau)dt \quad (5.1)$$

- **Fonction d'autocorrélation de $x(t)$:**

$$C_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t - \tau)dt \quad (5.2)$$

Relation entre énergie et fonction d'autocorrélation :

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t - \tau)dt = C_{xx}(0) \quad (5.3)$$

La valeur à l'origine d'une fonction d'autocorrélation représente l'énergie du signal :

$$E_x = C_{xx}(0) \quad (5.4)$$

5.3. CORRELATION DE SIGNAUX A PUISSANCE MOYENNE FINIE

Ils sont d'énergie infinie et couvrent en particulier les signaux périodiques. Les définitions précédentes sont modifiées comme suit :

- **Fonction d'inter-corrélation (produit de corrélation de x par y)**

$$C_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t)y^*(t - \tau)dt \quad (5.5)$$

- **Fonction d'autocorrélation de $x(t)$:**

$$C_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x^*(t) x(t - \tau)dt \quad (5.6)$$

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x^*(t) x(t - \tau)dt = C_x(0) \quad (5.7)$$

5.4. CORRELATION

5.4.1. Autocorrélation

Pour un signal à énergie finie l'autocorrélation est définie par :

$$C_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t - \tau)dt \quad (5.8)$$

$C_{xx}(\tau)$ est homogène à une énergie. $C_{xx}(0)$ est l'énergie du signal.

Pour un signal à puissance moyenne finie l'autocorrélation, homogène à une puissance, est définie par :

$$C_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t)x^*(t - \tau)dt \quad (5.9)$$

Dans ce cas, $C_x(\tau)$ est la puissance moyenne du signal.

5.4.2. L'inégalité de Cauchy-Schwartz permet d'écrire :

$$|C_x(\tau)| \leq C_x(0) \quad (5.10)$$

L'autocorrélation est maximale lorsque le retard est nul. L'autocorrélation permet une comparaison entre le signal $x(t)$ et sa copie retardée $x(t-\tau)$. La ressemblance est maximale en absence de décalage.

D'autre part, nous avons :

$$C_x^*(-\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t) x(t + \tau)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(u - \tau)x(u) du = C_x(\tau) \quad (5.11)$$

Si le signal $x(t)$ est réel, il en est de même de sa fonction d'autocorrélation, qui est donc paire.

Considérons un signal sinusoïdal défini par :

$$x(t) = A \sin(\omega t) \quad (5.12)$$

C'est clairement un signal à énergie infinie :

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} A^2 \sin^2(\omega t) dt = A^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos(2\omega t)}{2} dt = \frac{A^2}{2} \left[t - \frac{\sin(2\omega t)}{2\omega} \right]_{-\infty}^{+\infty} \quad (5.13)$$

Calculons sa puissance moyenne :

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} A^2 \sin^2(\omega t) dt$$

$$P(T) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} A^2 \sin^2(\omega t) dt = \frac{A^2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \frac{1 - \cos(2\omega t)}{2} dt$$

$$P(T) = \frac{A^2}{2T} \left[t - \frac{\sin(2\omega t)}{2\omega} \right]_{-T/2}^{+T/2} = \frac{A^2}{2T} \left[T - \frac{\sin(\omega T)}{\omega} \right]$$

Donc :

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} P(T) = \frac{A^2}{2}$$

La puissance moyenne est finie, c'est aussi la puissance moyenne sur une période.

Calculons la fonction d'autocorrélation de ce signal :

$$C_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) x(t - \tau) dt$$

Calculons l'intégrale :

$$I = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} A^2 \sin(\omega t) \sin(\omega t - \omega\tau) dt = \frac{A^2}{2T} \int_{-T/2}^{T/2} [\cos(\omega\tau) - \cos(2\omega t - \omega\tau)] dt$$

$$I = \frac{A^2}{2T} \left[\cos(\omega\tau) t - \frac{\sin(2\omega t - \omega\tau)}{2\omega} \right]_{-T/2}^{T/2}$$

$$I = \frac{A^2}{2T} \left\{ \cos(\omega\tau) T - \frac{\sin[\omega(t - \tau)]}{2\omega} - \frac{\sin[\omega(t + \tau)]}{2\omega} \right\}$$

Donc :

$$C_x(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos(\omega\tau)$$

C'est une fonction périodique, de même période que le signal, maximum (égal à la puissance moyenne) lorsque signal et signal décalé sont en phase, minimum lorsque signal et signal décalé sont en opposition de phase.

5.4.3. Signaux périodiques

Le résultat obtenu pour un signal sinusoïdal se généralise à tous les signaux périodiques.

Considérons un signal périodique quelconque $x(t)$. Nous savons qu'il peut se décomposer en une somme de sinusoïdes, par exemple :

$$x(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \cos(n\omega t + \varphi_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \cos(n\omega t + \varphi_n) \quad \text{avec } \varphi_0 = 0 \quad (5.14)$$

Calculons la fonction d'autocorrélation de ce signal :

$$C_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) x(t - \tau) dt$$

Nous avons :

$$x(t) x(t - \tau) = \sum_{n,m} c_n c_m \cos(n\omega t + \varphi_n) \cos[m\omega(t - \tau) + \varphi_m]$$

$$x(t) x(t - \tau) = \sum_{n,m} c_n c_m \frac{\cos[(n+m)\omega t + \varphi_n + \varphi_m] + \cos[(n-m)\omega t + \varphi_n + m\omega\tau - \varphi_m]}{2}$$

Nous devons donc calculer des termes de la forme :

$$I_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \cos(k\omega t + \phi) dt$$

Pour $k = 0$ nous avons :

$$I_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \cos(\phi) dt = \cos(\phi)$$

Pour $k \neq 0$:

$$I_k = \left[\frac{\sin(k\omega t + \phi)}{k\omega T} \right]_{-T/2}^{+T/2} = \frac{\sin\left(k\omega \frac{T}{2} + \phi\right) - \sin\left(-k\omega \frac{T}{2} + \phi\right)}{k\omega T}$$

$$I_k = \frac{2 \sin\left(k\omega \frac{T}{2}\right) \cos(\phi)}{k\omega T}$$

Donc :

$$\forall k \neq 0 \quad \lim_{T \rightarrow +\infty} I_k = 0$$

Donc, parmi les termes du type $\cos[(n+m)\omega t + \varphi_n + \varphi_m]$ seule la combinaison $n = m = 0$ contribue. Et parmi les termes du type $\cos[(n-m)\omega t + m\omega t + \varphi_n - \varphi_m]$ toutes les combinaisons $n = m$ contribuent donnant des termes en $\cos(m\omega t)$. Nous avons donc :

$$C_x(\tau) = \frac{c_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n^2 \cos(n\omega\tau)}{2} = c_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n^2}{2} \cos(n\omega\tau) \quad (5.15)$$

C'est une fonction périodique de même période que le signal $x(t)$. Pour $t = 0$, nous retrouvons la décomposition de la puissance du signal :

$$C_x(0) = c_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n^2}{2} \quad (5.16)$$

5.5. INTER-CORRELATION

Pour deux signaux à énergie finie on définit l'inter-corrélation par :

$$C_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t - \tau)dt \quad (5.17)$$

L'inter-corrélation peut permettre de mesurer un décalage en temps. Effet supposons que le signal $y(t)$ correspond à $x(t)$ décalé de τ_0 :

$$y(t) = x(t - \tau_0) \quad (5.18)$$

Calculons l'inter-corrélation entre ces deux signaux. Nous pouvons écrire :

$$C_{yx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) x^*(t-\tau) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau_0) x^*(t-\tau) dt \quad (5.19)$$

Effectuons un changement de variable en posant $u = t - \tau_0$. Il vient :

$$C_{yx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) x^*(u + \tau_0 - \tau) du = C_x(\tau - \tau_0) \quad (5.20)$$

L'inter-corrélation C_{xy} est maximale pour $t = \tau_0$, retard de y par rapport à x .

A titre d'illustration, les figures 5-1 et 5-2 présentent un signal $x(t)$ et un signal $y(t)$ obtenu en retardant de 5 unités de temps le signal x . Nous avons choisi un signal sinusoïdal pondéré par une exponentielle symétrique de la forme (à un retard temporel près) :

$$x(t) = \sin(\omega t) e^{-a|t|} \quad (5.21)$$

L'autocorrélation $C_{xx}(t)$ est visualisée sur la figure 5-3. Elle est maximale pour $\tau = 0$.

L'intercorrélation $C_{xy}(t)$ est présentée sur la figure 5-4. Son maximum se situe à $\tau = 5$, ce qui correspond au retard de y par rapport à x .

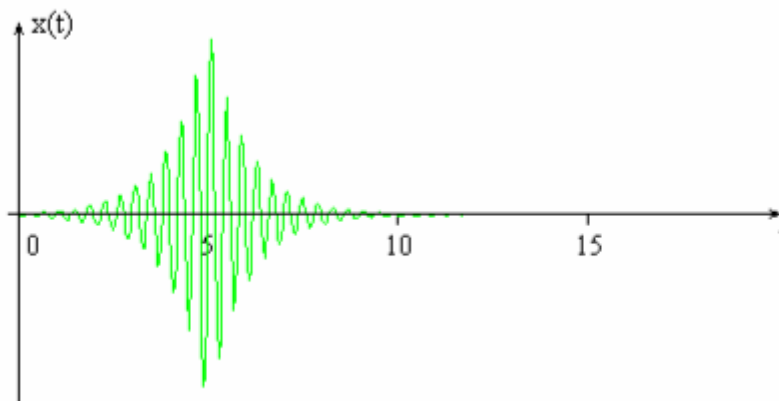


Figure 5.1 : un signal $x(t)$

On peut démontrer que la fonction d'autocorrélation (fig. 5-3) du signal $x(t)$ peut s'écrire :

$$C_x(\tau) = \frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{\omega^2}{a(a^2 + \omega^2)} + |\tau| \right] \cos(\omega\tau) - \frac{a^2 \sin(\omega|\tau|)}{\omega(a^2 + \omega^2)} \right\} e^{-|\tau|}$$

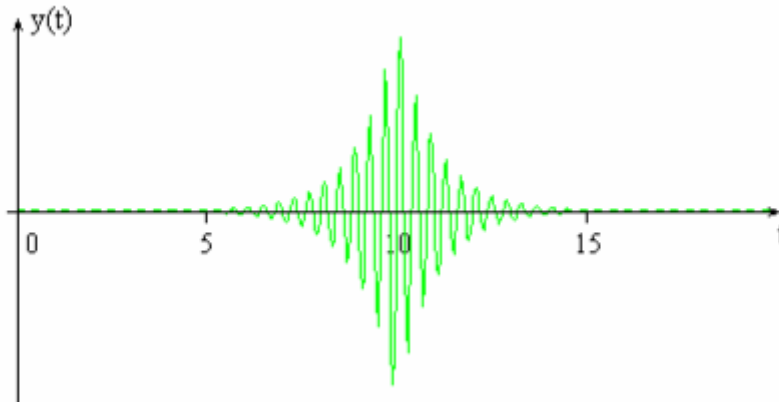


Figure 5.2 : un signal $y(t)$ obtenu en retardant le signal de la figure 5.1

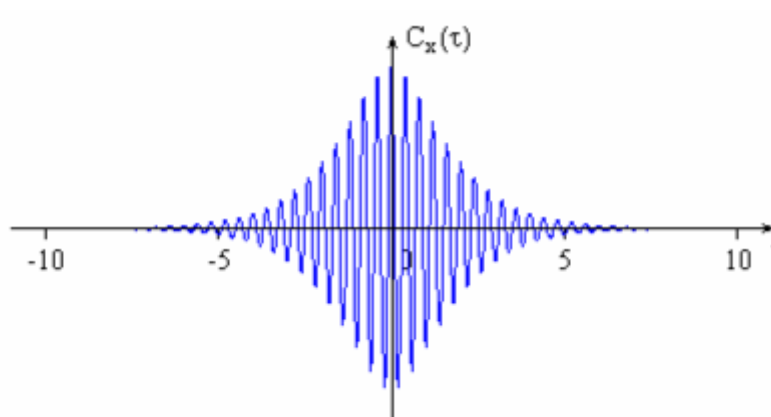


Figure 5.3 : Autocorrélation du signal de la figure 5.1

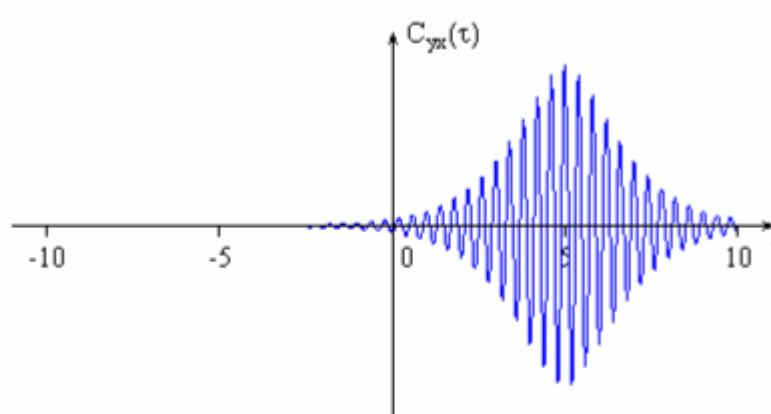


Figure 5.4 : inter-corrélation des signaux des figures 5.1 et 5.2

Remarquons que l'ordre des indices est important, nous avons en effet :

$$C_{xy}^*(-\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t) y(t+\tau) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(u-\tau) y(u) du = C_{yx}(\tau) \quad (5.22)$$

Si les signaux $x(t)$ et $y(t)$ sont réels il en est de même pour les fonctions d'inter-corrélation et :

$$C_{xy}(\tau) = C_{xy}(-\tau) \quad (5.23)$$

5.6. RELATIONS DE WIENER-KHINTCHINE

Densités spectrales d'énergie ou de puissance sont reliées aux fonctions de corrélation.

Reprenons, par exemple, la définition de l'inter-corrélation de deux signaux :

$$C_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) y^*(t-\tau) dt \quad (5.24)$$

L'identité de Parseval nous permet de remplacer l'intégration dans le domaine temporel par une intégration du produit des transformées de Fourier dans le domaine fréquentiel :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g^*(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) G^*(j\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\nu) G^*(\nu) d\nu$$

Notons $X(\nu)$ et $Y(\nu)$ les transformées de Fourier des signaux $x(t)$ et $y(t)$. Nous avons :

$$Y_\tau(\nu) = \text{TF}[y(t-\tau)] = Y(\nu) e^{-j2\pi\nu\tau} \quad \text{et} \quad Y_\tau^*(\nu) = Y^*(\nu) e^{j2\pi\nu\tau}$$

Nous pouvons donc écrire :

$$C_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu) Y_\tau^*(\nu) e^{j2\pi\nu\tau} d\nu$$

C'est-à-dire que l'inter-corrélation est la transformée inverse de la densité spectrale d'énergie d'interaction :

$$C_{xy}(\tau) = \text{TF}^{-1}[S_{xy}(\nu)] \quad (5.25)$$

Donc inversement, la densité spectrale d'interaction est la transformée de l'inter-corrélation :

$$S_{xy}(\nu) = \text{TF}[C_{xy}(\tau)] \quad (5.26)$$

Nous avons une relation équivalente entre la densité spectrale d'énergie d'un signal et son

Auto-corrélation :

$$S_x(\nu) = \text{TF}[C_x(\tau)]$$

$$C_x(\tau) = \text{TF}^{-1}[S_x(\nu)]$$

(5.27)

5.7. PROPRIETE DE CORRELATION

5.7.1. Propriété de corrélation (signaux d'énergie finie)

- Relation entre corrélation et convolution

$$c_{xy}(\tau) = x(\tau) * y^*(-\tau) \quad (5.28)$$

La différence entre d'inter-corrélation $c_{xy}(\tau)$ et la convolution des deux fonctions se trouve au niveau de la fonction qui est inversé par rapport au temps. Dans le cas des fonctions réelles et paires alors :

$$c_{xy}(\tau) = x(\tau) * y(\tau) \quad (5.29)$$

- Symétrie

Dans le cas où les signaux sont complexes :

$$c_{xy}(-\tau) = c_{yx}^*(\tau)$$

$$c_x(-\tau) = c_x^*(\tau) \quad (5.30)$$

Dans le cas où les signaux sont réels :

$$c_{xy}(\tau) = c_{yx}(-\tau)$$

Remarque : pour une fonction d'autocorrélation, on peut dire que pour un signal réel.

$$c_x(\tau) = c_x(-\tau)$$

Cela veut dire que la fonction d'autocorrélation $c_x(\tau)$ est une fonction réelle paire.

Si x est réel :

$$\text{energie du signal: } E_x = c_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \quad (5.31)$$

$$|c_x(\tau)| \leq c_x(0)$$

5.7.2. Propriété de corrélation (signaux à puissance moyenne finie)

- Symétrie :

$$c_{xy}(-\tau) = c_{yx}^*(\tau)$$

$$c_x(-\tau) = c_x^*(\tau)$$

Si x est réel :

$$c_x(-\tau) = c_x(\tau)$$

puissance moyenne du signal: $P_x = c_x(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt$ (5.32)

$$|c_x(\tau)| \leq c_x(0)$$

- La périodicité

Si un signal $x(t)$ est périodique d'une période T , $c_x(\tau)$ est aussi périodique de la même période.

$$x(t) = x(t + kT) \rightarrow c_x(\tau) = c_x(\tau + kT) \quad (5.33)$$

- Additivité

$$z(t) = x(t) + y(t) \rightarrow c_z(\tau)$$

$$c_z(\tau) = c_x(\tau) + c_y(\tau) + c_{xy}(\tau) + c_{yx}(\tau) \quad (5.34)$$

- Cas particulier

Si $x(t)$ et $y(t)$ sont indépendants (il n'y a aucune ressemblance entre les deux).

$$c_{xy}(\tau) = c_{yx}(\tau) = 0 \quad (5.35)$$

$$c_z(\tau) = c_x(\tau) + c_y(\tau) \quad (5.36)$$

Annexe

Formulaire Propriétés De Fourier

Transformées Usuelles Et Des Transformées De Laplace

Définitions et notations

Décomposition en série de Fourier (x(t) périodique):

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{j2\pi k f_0 t}$$
$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt$$

Transformée de Fourier :

5. Variable f :

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt$$
$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df$$

6. Variable $\omega = 2\pi f$:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$
$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Transformée de Laplace bilatérale

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-st} dt$$

Avec : $s = \sigma + j\omega \in C$.

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\Delta} X(s) e^{st} ds$$

où Δ est une droite parallèle à $s = j\omega$ et située dans la région de convergence de $X(s)$.

Série de Fourier : propriétés

Signal périodique	Coefficients de la série
$x(t)$ (période T_0)	a_k
$y(t)$ (période T_0)	b_k
$Ax(t) + By(t)$	$Aa_k + Bb_k$
$x(t - t_0)$	$a_k e^{-jk(\frac{2\pi}{T_0})t_0}$
$e^{jM(\frac{2\pi}{T_0})t} x(t)$	a_{k-M}
$x^*(t)$	a_{-k}^*
$x(-t)$	a_{-k}
$x(\alpha t)$, $\alpha > 0$ (période $\frac{T_0}{\alpha}$)	a_k
$\frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(\tau) y(t - \tau) d\tau$	$a_k b_k$
$x(t)y(t)$	$\sum_{l=-\infty}^{+\infty} a_l b_{k-l}$
$\frac{dx(t)}{dt}$	$jk \frac{2\pi}{T_0} a_k$
$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$ (avec $a_0 = 0$)	$\left(\frac{1}{jk(\frac{2\pi}{T_0})} \right) a_k$
$x(t)$ réel	$a_k = a_{-k}^*$
$x(t)$ réel et pair	a_k réel et $a_k = a_{-k}$
Relation de Parseval : (signaux périodiques)	$\frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) ^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k ^2$

Transformée de Fourier : propriétés

Signal	Transformée (en f)	Transformée (en ω)
$x(t)$	$X(f)$	$X(\omega)$
$x_1(t)$	$X_1(f)$	$X_1(\omega)$
$x_2(t)$	$X_2(f)$	$X_2(\omega)$
$a x_1(t) + b x_2(t)$	$a X_1(f) + b X_2(f)$	$a X_1(\omega) + b X_2(\omega)$
$x(t - t_0)$	$e^{-j2\pi f t_0} X(f)$	$e^{-j\omega t_0} X(\omega)$
$e^{j2\pi f_0 t} x(t)$	$X(f - f_0)$	$X(\omega - \omega_0) \quad (\omega_0 = 2\pi f_0)$
$x(at)$	$\frac{1}{ a } X\left(\frac{f}{a}\right)$	$\frac{1}{ a } X\left(\frac{\omega}{a}\right)$
$x^*(t)$	$X^*(-f)$	$X^*(-\omega)$
$x(-t)$	$X(-f)$	$X(-\omega)$
$x_1(t) * x_2(t)$	$X_1(f) X_2(f)$	$X_1(\omega) X_2(\omega)$
$x_1(t) \cdot x_2(t)$	$X_1(f) * X_2(f)$	$\frac{1}{2\pi} X_1(\omega) * X_2(\omega)$
$\frac{d}{dt} x(t)$	$j2\pi f X(f)$	$j\omega X(\omega)$
$t x(t)$	$\frac{j}{2\pi} \frac{d}{df} X(f)$	$j \frac{d}{d\omega} X(\omega)$
$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$	$\frac{1}{j2\pi f} X(f) + \frac{1}{2} X(0) \delta(f)$	$\frac{1}{j\omega} X(\omega) + \pi X(0) \delta(\omega)$
$x(t)$ réel	$\begin{cases} X(-f) = X^*(f) \\ X(-f) = X(f) \\ \text{Arg } X(-f) = -\text{Arg } X(f) \end{cases}$	$\begin{cases} X(-\omega) = X^*(\omega) \\ X(-\omega) = X(\omega) \\ \text{Arg } X(-\omega) = -\text{Arg } X(\omega) \end{cases}$
Dualité	$\begin{cases} g(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} h(f) \\ h(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} g(-f) \end{cases}$	$\begin{cases} g(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} h(\omega) \\ h(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi g(-\omega) \end{cases}$
Relation de Parseval (signaux d'énergie finie)	$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) ^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) ^2 df$	$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) ^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) ^2 d\omega$

Transformée de Laplace bilatérale : propriétés

Signal	Transformée	RDC
$x(t)$	$X(s)$	R
$x_1(t)$	$X_1(s)$	R_1
$x_2(t)$	$X_2(s)$	R_2
$ax_1(t) + bx_2(t)$	$aX_1(s) + bX_2(s)$	au moins $R_1 \cap R_2$
$x(t - t_0)$	$e^{-st_0} X(s)$	R
$e^{s_0 t} x(t)$	$X(s - s_0)$	R translaté de s_0
$x(at)$	$\frac{1}{ a } X\left(\frac{s}{a}\right)$	$s \in \mathbf{RDC}$ si $\frac{s}{a} \in R$
$x_1(t) * x_2(t)$	$X_1(s)X_2(s)$	au moins $R_1 \cap R_2$
$\frac{d}{dt}x(t)$	$sX(s)$	au moins R
$-tx(t)$	$\frac{d}{ds}X(s)$	R
$\int_{-\infty}^t x(\tau)d\tau$	$\frac{1}{s}X(s)$	au moins $R \cap \{\mathbf{Re}(s) > 0\}$
Th. valeur finale		$\lim_{s \rightarrow 0} sX(s) = x(+\infty)$
Th. valeur initiale $x(t) = 0, t < 0$		$\lim_{s \rightarrow +\infty} sX(s) = x(0^+)$

Différence avec la transformée de Laplace monolatérale définie par :



$$\mathcal{L}^+[x(t)] = X^+(s) = \int_0^{+\infty} x(t)e^{-st} dt$$

On a la relation :

$$\mathcal{L}^+ \left[\frac{d}{dt} x(t) \right] = sX^+(s) - x(0^-)$$

Si $x(t)$ ne présente pas d'impulsions à l'origine.

Table des transformées de Laplace



	$f(t)$	$F(s)$
P1	1 ou $u(t)$	$\frac{1}{s}$
P2	t	$\frac{1}{s^2}$
P3	t^n (n entier positif)	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
P4	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
P5	$t e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$
P6	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
P7	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
P8	$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
P9	$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$
P10	$t \sin \omega t$	$\frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}$
P11	$t \cos \omega t$	$\frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$
P12	$t^n, n \in \mathbb{R}, n > -1$	$\frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}$
P13	$u(t-a)$	$\frac{e^{-as}}{s}$



	$f(t)$	$F(s)$
P14	$\delta(t)$	1
P14 a	$\delta(t-a)$	e^{-as}
P15	$a f(t)+b g(t)$	$a F(s)+b G(s)$
P16	$f'(t)$	$s F(s)-f(0^+)$
P17	$f''(t)$	$s^2 F(s)-s f(0)-f'(0)$
P18	$f^{(n)}(t)$	$s^n F(s)-s^{n-1} f(0)-\dots-f^{(n-1)}(0)$
P19	$e^{-at} f(t)$	$F(s+a)$
P20	$f(at)$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$
P21	$t^n f(t)$	$(-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$
P22	$f(t-a)u(t-a)$	$e^{-as} F(s)$
P23	$\int_0^t f(x)dx$	$\frac{F(s)}{s}$
P24	$\int_0^t f(x)g(t-x)dx$	$F(s) \cdot G(s)$
P25	$f(t)$, une fonction périodique de période P	$\frac{\int_0^P e^{-st} f(t) dt}{1-e^{-sP}}$
P26	$g(t)u(t-a)$	$e^{-as} \mathcal{L}\{g(t+a)\}$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{s \rightarrow \infty} s F(s) &= f(0^+) \\ \lim_{s \rightarrow 0} s F(s) &= \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) \end{aligned} \right\} \text{ si les limites existent.}$$

	$F(s)$	$f(t)$
P27	$\frac{1}{(s+a)^n}$, n entier positif	$\frac{t^{n-1} e^{-at}}{(n-1)!}$
P28	$\frac{1}{s^2 + \omega^2}$	$\frac{1}{\omega} \sin(\omega t)$
P29	$\frac{1}{(s+a)^2 + \omega^2}$	$\frac{1}{\omega} e^{-at} \sin(\omega t)$
P30	$\frac{1}{s^2 - a^2}$	$\frac{1}{2a} (e^{at} - e^{-at})$
P31	$\frac{s}{s^2 - a^2}$	$\frac{1}{2} (e^{at} + e^{-at})$
P32	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$, si $a \neq b$	$\frac{1}{b-a} (e^{-at} - e^{-bt})$
P33	$\frac{s}{(s+a)(s+b)}$, si $a \neq b$	$\frac{1}{b-a} (be^{-bt} - ae^{-at})$
P34	$\frac{1}{(s^2 + \omega^2)^2}$	$\frac{1}{2\omega^3} (\sin(\omega t) - \omega t \cos(\omega t))$
P35	$\frac{s}{(s^2 + \omega^2)^2}$	$\frac{1}{2\omega} t \sin(\omega t)$
P36	$\frac{s^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$	$\frac{1}{2\omega} (\sin(\omega t) + \omega t \cos(\omega t))$
P37	$\frac{1}{s(s^2 + \omega^2)}$	$\frac{1}{\omega^2} (1 - \cos(\omega t))$
P38	$\frac{1}{s^2(s^2 + \omega^2)}$	$\frac{1}{\omega^3} (\omega t - \sin(\omega t))$
P39	$\frac{s}{(s^2 + \omega^2)(s^2 + \beta^2)}$, si $\omega^2 \neq \beta^2$	$\frac{1}{\beta^2 - \omega^2} (\cos(\omega t) - \cos(\beta t))$
P40	$\frac{1}{(s^2 + \omega^2)(s^2 + \beta^2)}$, si $\omega^2 \neq \beta^2$	$\frac{1}{\beta\omega(\beta^2 - \omega^2)} (\beta \sin(\omega t) - \omega \sin(\beta t))$

Transformées de Fourier usuelles

$x(t)$	$X(f)$	$X(\omega)$
$\exp(j2\pi f_0 t)$	$\delta(f - f_0)$	$2\pi \delta(\omega - \omega_0)$
$\cos(2\pi f_0 t)$	$\frac{1}{2}[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$	$\pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$
$\sin(2\pi f_0 t)$	$\frac{1}{2j}[\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)]$	$\frac{\pi}{j}[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$
$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \exp(j2\pi k f_0 t)$	$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta(f - k f_0)$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta(\omega - k\omega_0)$
1	$\delta(f)$	$2\pi \delta(\omega)$
$\exp(-a t) ; a > 0$	$\frac{2a}{a^2 + (2\pi f)^2}$	$\frac{2a}{a^2 + (\omega)^2}$
$sign(t)$	$v.p. \left(\frac{1}{j\pi f} \right)$	$v.p. \left(\frac{2}{j\omega} \right)$
$u(t)$	$v.p. \left(\frac{1}{j2\pi f} \right) + \frac{1}{2}\delta(f)$	$v.p. \left(\frac{1}{j\omega} \right) + \pi\delta(\omega)$
$rect_{2T}(t)$	$2T \text{ sinc}(2fT) = \frac{\sin(2\pi fT)}{\pi f}$	$2T \text{ sinc}\left(\frac{\omega T}{\pi}\right) = \frac{2 \sin(\omega T)}{\omega}$
$2f_0 \text{ sinc}(2f_0 t) = \frac{\sin(2\pi f_0 t)}{\pi t}$	$rect_{2f_0}(f)$	$rect_{2\omega_0}(\omega)$
$\exp\left[-\pi\left(\frac{t^2}{\sigma^2}\right)\right]$	$\sigma \exp[-\pi(\sigma f)^2]$	$\sigma \exp\left[-\frac{(\sigma\omega)^2}{4\pi}\right]$
$\delta(t)$	1	1
$\delta^n(t)$ (dérivée $n^{\text{ième}}$)	$(j2\pi f)^n$	$(j\omega)^n$
$\delta(t - t_0)$	$\exp(-j2\pi f t_0)$	$\exp(-j\omega t_0)$
$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)$	$\frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - \frac{k}{T})$	$\frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - \frac{k2\pi}{T})$

$$\omega_0 = 2\pi f_0$$

**Transformées de Fourier usuelles
 (Fonctions nulles pour $t < 0$)**

$x(t)$	$X(f)$	$X(\omega)$
$u(t)$	$v.p. \left(\frac{1}{j2\pi f} \right) + \frac{1}{2}\delta(f)$	$v.p. \left(\frac{1}{j\omega} \right) + \pi\delta(\omega)$
$\exp(-at) u(t) ; \mathbf{Re}(a) > 0$	$\frac{1}{j2\pi f + a}$	$\frac{1}{j\omega + a}$
$t \exp(-at) u(t) ; \mathbf{Re}(a) > 0$	$\frac{1}{(j2\pi f + a)^2}$	$\frac{1}{(j\omega + a)^2}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \exp(-at) u(t) ; \mathbf{Re}(a) > 0$	$\frac{1}{(j2\pi f + a)^n}$	$\frac{1}{(j\omega + a)^n}$
$\exp(-at) \sin(2\pi f_0 t) u(t) ; \mathbf{Re}(a) > 0$	$\frac{2\pi f}{(j2\pi f + a)^2 + (2\pi f_0)^2}$	$\frac{\omega}{(j\omega + a)^2 + (\omega_0)^2}$
$\exp(-at) \cos(2\pi f_0 t) u(t) ; \mathbf{Re}(a) > 0$	$\frac{j2\pi f + a}{(j2\pi f + a)^2 + (2\pi f_0)^2}$	$\frac{j\omega + a}{(j\omega + a)^2 + (\omega_0)^2}$

$$\omega_0 = 2\pi f_0$$

Bibliographie

- [1] Fatima Tahri, cours du théorie et traitement de signal, école supérieur en génie électronique et énergétique Oran Algérie ESG2E, janvier 2018
- [2] Voir le site Wikipédia consacre à Joseph Fourier, et son lien vers Google books
- [3] Nicolas Errien, Cours signal m1 traitement du signal, univ-lemans, France, 2008/2009
- [4] Jean-pierre Delmas, Cours théorie du signal, polycopie, (institut national des télécommunications, 1980)
- [5] Claude Gimenes, polycopie théorie du signal, (institut national des télécommunications, 1982)
- [6] y. Thomas, signaux et systèmes linéaires, Masson, paris, 1992.
- [7] Dr. K. Labadi, cours transformée de Laplace, cours d'automatique (1ère année ingénieur), grande école d'ingénieurs avec prépa intégrée, établissement d'enseignements supérieur privé reconnu par l'état EPMI (Cergy) école d'ingénieurs, 2008/2009
- [8] J.-f. Bercher, cours TF, Dirac, convolution, et tutti quanti, école supérieures d'ingénieurs en électrotechnique et électronique, octobre 2001 – version 0.2
- [9] Raymond Quere, cours de mathématiques du signal, option Sln&rl, IUT du Limousin, département GEI Brive, septembre 2012
- [10] A.V. Oppenheim and A.S. Willsky with I.Y. Young, signals and systems, prentice hall, signal processing series, Englewood cliffs, 1983.
- [11] J.P. Delmas, éléments de théorie du signal : les signaux déterministes, ellipses, paris, 1991.
- [12] S. Haykin, "signals and systems", John Wiley & Sons, 2nd ed., 2003.
- [13] A.V. Oppenheim, "signals and systems", prentice-hall, 2004.
- [14] Radia. Abdelli, université Abderrahmane Mira (Bejaia), département de génie électrique, polycopie du cours théorie du signal, cours de 2ème année (st), 2017
- [15] S. Tisserant, cours traitement du signal, ESIL, 2007-2008
- [16] F. De Coulon, "théorie et traitement des signaux", Edition PPUR.
- [17] F. Cottet, "traitement des signaux et acquisition de données, cours et exercices résolus", DUNOD.
- [18] B. Picinbono, "théorie des signaux et des systèmes avec problèmes résolus", Edition Bordas.
- [19] M. Benidir, "théorie et traitement du signal, tome 1 : représentation des signaux et des systèmes - cours et exercices corrigés", DUNOD, 2004.
- [20] M. Benidir, "théorie et traitement du signal, tome 2 : méthodes de base pour l'analyse et le traitement du signal - cours et exercices corrigés", DUNOD, 2004.
- [21] J. Max, traitement du signal
- [22] Christian Jutten, cours théorie du signal université Joseph Fourier - Polytech' Grenoble, novembre 2009
- [23] Abdellah Kaddai, cours théorie du signal, département d'électronique (UHBC), 2016



- [24] Serge dos Santos, cours de traitement du signal (signaux déterministes (ts1) et signaux aléatoires (ts2)), institut national des sciences appliquées centre val de LOIRE - BLOIS – bourges (INSA CVL), département génie des systèmes industriels, année 2015-2016.
- [25] Fabrice Heitz, cours introduction au traitement du signal, université de STRASBOURG / ICUBE CNRS janvier 2015
- [26] Sondes abdelmouleh, cours de traitement du signal, 2010
- [27] A. Aarabi cours introduction au traitement numérique du signal, UPJV — université de Picardie- Jules Verne, 2013-2014.
- [28] Serge dos Santos, cours de traitement du signal (signaux déterministes (ts1) et signaux aléatoires (ts2)), année 2015-2016.
- [29] https://sites.google.com/site/sfagispages/cours_ts_2016_insacvl.pdf, 18/04/2021
- [30] https://celene.insacvl.fr/pluginfile.php/2200/mod_resource/content/1/cours_ts_2016_gsi_insacvl.pdf, 18/04/2021
- [31] <https://camillearbonnier.files.wordpress.com/2013/02/slides.pdf>, 18/04/2021
- [32] Dr. Mustapha Abarkan, « Traitement du signal ». Université Sidi Mohamed Ben Abdellah, Maroc, 2017-2018